

# Einführung in die perturbative Quantisierung von Chern-Simons-Theorien

Konrad Waldorf

Februar 2005\*

Die Zustandssumme der Chern-Simons-Theorie auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (ohne Rand),

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}A \exp(2\pi i k S_{CS}(A)), \quad (1)$$

ist eine sowohl für die Physik ( $\rightarrow$ Quantenfeldtheorie) als auch für die Mathematik ( $\rightarrow$ Topologische Invarianten) interessante, leider aber auch nicht wohldefinierte Größe. Neben einer durch E. Witten entwickelten Interpretation durch Knotentheorie [Wi], gibt es einen perturbativen Ansatz, der auf Arbeiten von S. Axelrod und I.M. Singer basiert [AxSi], und den wir hier diskutieren wollen.

Wir wiederholen kurz die für uns wichtigen Aspekte des Chern-Simons-Wirkungsfunktional. Es besteht aus einem im Zusammenhang  $A$  quadratischen (kinetischen) Term und einem kubischen (Selbstwechselwirkungs-) Term. Unsere Interpretation der Zustandssumme wird sich an einer analogen, endlich-dimensionalen Situation orientieren, für die wir zunächst Integralformeln zur Berechnung des Exponentials des quadratischen Terms angeben. Den kubischen Term werden wir in eine Störungsreihe entwickeln.

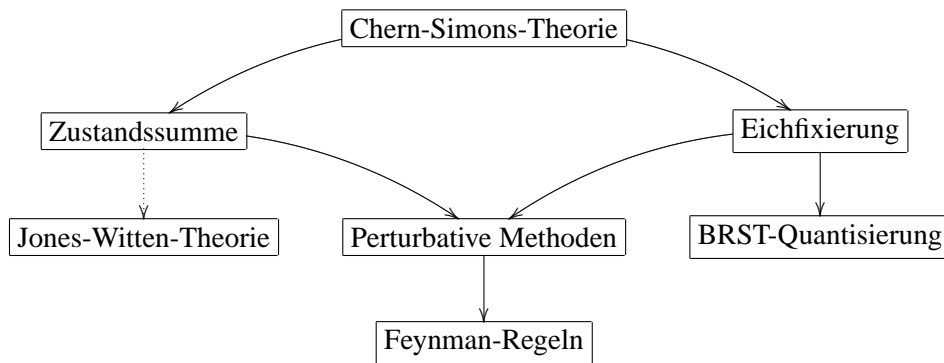
Die Anwendung dieser Methoden wird im Wesentlichen durch die Eichinvarianz des Chern-Simons-Wirkungsfunktional verhindert. Das begründet die Notwendigkeit einer Eichfixierung. Dabei addieren wir Terme, die die Eichinvarianz brechen. Diese Terme finden eine physikalische Interpretation in der Existenz neuer Teilchen (Fadeev-Popov-Geister). Diese führen allerdings zu unphysikalischen Zuständen, was uns zu einer kurzen Erläuterung der BRST-Kohomologie motiviert.

Zuletzt wenden wir die endlich-dimensionalen Integralformeln auf das eichfixierte Wirkungsfunktional an und erhalten so eine Interpretation der Zustandssumme als eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten  $k^{-1}$ . Die Summanden dieser Störungsreihe können graphisch durch Feynman-Diagramme visualisiert werden.

Umgekehrt kann man über die Feynman-Regeln der Chern-Simons-Theorie auf kombinatorischem Niveau Feynman-Diagramme zeichnen und auf diesem Wege die Summanden der Störungsreihe rekonstruieren.

---

\*Diese Arbeit ist aus einem Vortrag im Blockseminar „Geometrische Aspekte der konformen Feldtheorie“ in Rerik/Ostsee entstanden; organisiert von C. Bär (Potsdam) und C. Schweigert (Hamburg).



## Chern-Simons-Theorie

Eine ausführliche Abhandlung klassischer Chern-Simons-Theorie kann man in [Fr] finden. Hier wollen wir nur die für uns notwendigen Dinge zusammenfassen.

Wir arbeiten auf einer kompakten, orientierten, dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  (ohne Rand) und betrachten trivialisierbare  $G$ -Hauptfaserbündel über  $M$ , wobei  $G$  eine kompakte, einfache, zusammenhängende, einfach zusammenhängende Liegruppe ist. Für  $G = SU(2)$  z.B. ist jedes  $G$ -Hauptfaserbündel über  $M$  trivial. Die Liealgebra von  $G$  sei  $\mathfrak{g}$ .

Ein prinzipialer Zusammenhang  $\omega$  auf  $P$  ist eine  $\mathfrak{g}$ -wertige Einsform  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  auf  $P$ . Wir wählen eine globale Trivialisierung  $s : M \rightarrow P$  und identifizieren so über  $A := s^*\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$  die Menge  $\mathcal{A}_M$  der prinzipialen Zusammenhänge über  $P$  mit  $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ . Nach dieser Identifizierung haben wir für einen Zusammenhang  $A \in \mathcal{A}_M$  die kovariante Ableitung

$$d^A = d + [A, \cdot] : \Omega^k(M, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathfrak{g});$$

und die Krümmung  $\Omega$  eines prinzipialen Zusammenhangs  $\omega$  wird zu

$$F(A) := s^*\Omega = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

für  $A = s^*\omega$ . Für flache Zusammenhänge  $\alpha$ , also solche mit  $F(\alpha) = 0$ , gilt  $(d^\alpha)^2 = 0$ .

Wir identifizieren die Gruppe der Eichtransformationen mit  $\mathcal{G} = C^\infty(M, G)$ . Sie wirkt mit einem  $g \in \mathcal{G}$  von rechts auf einen Zusammenhang  $A \in \mathcal{A}_M$  in der üblichen Weise durch

$$g^*A := g^{-1}Ag + g^*\theta,$$

wobei  $\theta$  die linksinvariante Maurer-Cartan-Form ist. Für die Krümmung gilt über die Strukturgleichung für  $\theta$

$$F(g^*A) = g^{-1}F(A)g.$$

Unter infinitesimalen Eichtransformationen mit  $g = \exp(tf)$  für ein  $f \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$  gilt

$$g^*A = A + td^A f + \mathcal{O}(t^2).$$

Mit den bis hierhin genannten Eigenschaften definieren wir für einen prinzipialen Zusammenhang  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  die Chern-Simons-Form durch

$$CS(\omega) := \text{tr}(\omega \wedge \Omega) - \frac{1}{6} \text{tr}(\omega \wedge [\omega \wedge \omega]) \in \Omega^3(P),$$

wobei  $\text{tr}$  die Spur auf der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  ist (sie könnte auch durch eine geeignete Bilinearform ersetzt werden). Das Chern-Simons-Wirkungsfunktional ist das Integral der mit unserer fixierten Trivialisierung zurückgezogenen Chern-Simons-Form,

$$S_{CS}(s^*\omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M s^*CS(\omega).$$

Wir werden im folgenden mit  $A := s^*\omega$  und der expliziten Form

$$S_{CS}(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (2)$$

rechnen. Unter globalen Eichtransformationen verhält sich das Chern-Simons-Funktional wie

$$S_{CS}(g^*A) = S_{CS}(A) - \int_M g^*\eta,$$

dabei ist  $\eta = \text{tr}(\theta \wedge [\theta \wedge \theta]) \in \Omega^3(G)$  die kanonische Dreiform der Liegruppe  $G$ , deren Kohomologieklassse  $[\eta] \in H_{dR}^3(G)$  integral ist. Unter infinitesimalen Eichtransformationen es das Chern-Simons-Wirkungsfunktional damit invariant. Unter globalen Eichtransformationen ist es lediglich invariant modulo  $\mathbb{Z}$ . Die Vorfaktoren sind so eingerichtet, dass die Zustandssumme (1) für ganze Zahlen  $k \in \mathbb{Z}$  invariant unter globalen Eichtransformationen ist.

Die kritischen Punkte des Chern-Simons-Wirkungsfunktionals sind genau die flachen Zusammenhänge, das heißt

$$\delta_A S_{CS} = 0 \iff F(A) = 0.$$

Die flachen Zusammenhänge sind also die klassischen Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen der Chern-Simons-Theorie.

Unsere Betrachtungen mit Einsformen auf  $M$  hängen immer noch von der Wahl der Trivialisierung  $s$  ab. Physikalisch entspricht das der Wahl eines Hintergrundfeldes. Darunter versteht man hier eine Lösung der klassischen Euler-Lagrange-Gleichungen, also die Wahl eines flachen Zusammenhangs  $\alpha$ . Den Schnitt bestimmt man dann so, dass  $s^*\alpha = 0$  gilt, das heißt unser Hintergrundfeld ist gerade die Null-Einsform.

### Integral mit quadratischem und kubischem Term

Im Chern-Simons-Wirkungsfunktional (2) identifizieren wir einen in  $A$  quadratischen und einen in  $A$  kubischen Term. In der Zustandssumme (1) soll in einer noch zu klärenden Weise das Exponential dieses Funktionals berechnet werden. Wir bereiten uns in diesem Abschnitt anhand von endlich-dimensionalen Beispielen auf die Integration von Exponentialen quadratischer und kubischer Terme vor.

**Mehrdimensionales Gaußsches Integral.** Wir beginnen mit dem gewöhnlichen Gaußschen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu x^2) dx = \frac{\pi^{1/2}}{\sqrt{\mu}}$$

für eine reelle Zahl  $\mu > 0$ . Durch analytische Fortsetzung erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x^2) dx = \frac{\pi^{1/2}}{\sqrt{|\lambda|}} \exp\left(\frac{\pi i}{4} \text{sgn } \lambda\right) \quad (3)$$

für ein  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ . Wir werden gleich sehen, dass wir außerdem einen zusätzlichen linearen Term berücksichtigen müssen, also einen Exponenten der Form  $i(\lambda x^2 + \kappa x)$ . In diesem Fall ergänzen wir quadratisch. Die quadratische Ergänzung ist konstant in  $x$  und wird vor das Integral gezogen, dieses wird gemäß (3) zu einer für uns unwichtigen Konstante integriert,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp i(\lambda x^2 + \kappa x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\lambda^{-1} \left( \left( x + \frac{\kappa}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{4\lambda^2} \right) dx = c \exp \left( \frac{-i\kappa^2}{4\lambda} \right).$$

In  $n$  Dimensionen beschreiben wir quadratische Terme durch quadratische Formen

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$$

für  $x \in \mathbb{R}^n$ . Man kann nun nachrechnen oder raten, dass für eine solche Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(iQ(x)) d^n x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{|\det Q|}} \exp\left(\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} Q\right) \quad (4)$$

gilt, sofern  $\det Q \neq 0$  ist. Das bedeutet, dass (4) nur für nicht-ausgeartete quadratische Formen gilt. Das sind genau die, für die die Matrix  $\{q_{ij}\}$  invertierbar ist.

Für einen zusätzlichen linearen Term  $Jx$  mit einem  $J \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp i(Q(x) + Jx) d^n x = c \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i,j} q^{ij} J_i J_j\right), \quad (5)$$

wobei die  $q^{ij}$  die Koeffizienten der zu  $\{q_{ij}\}$  inversen Matrix sind.

**Integral mit kubischem Term.** Wir wollen uns nun auf das Vorhandensein eines zusätzlichen kubischen Termes vorbereiten. Dabei folgen wir [Ko] und behandeln eine Abbildung

$$f(x) = Q(x) + \sum_{i,j,k} f_{ijk} x_i x_j x_k,$$

mit einer quadratischen Form  $Q$ , eine positive Konstante  $0 \leq k \in \mathbb{R}$ , und das Integral

$$Z_k = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(ikf(x)).$$

Wir entwickeln das Exponential des kubischen Terms in eine Potenzreihe,

$$Z_k = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(ikQ(x)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m k^m}{m!} \left( \sum_{i,j,k} f_{ijk} x_i x_j x_k \right)^m.$$

Über einen Variablenwechsel

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{k}} x \quad \text{und} \quad d^n x = \frac{1}{\sqrt{k^n}} d^n x \quad (6)$$

werden wir den Faktor  $k$  im Exponenten los und erhalten

$$Z_k = k^{-n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m! k^{m/2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(iQ(x)) \left( \sum_{i,j,k} f_{ijk} x_i x_j x_k \right)^m}_{:= Z_k^{(m)}}. \quad (7)$$

Zur Behandlung der Integrale  $Z_k^{(m)}$  in den einzelnen Summanden führen wir als Hilfsgröße eine Quelle  $J \in \mathbb{R}^n$  ein und schreiben

$$Z_k^{(m)} = \left[ \left( \sum_{i,j,k} f_{ijk} \frac{-i\partial}{\partial J_i} \frac{-i\partial}{\partial J_j} \frac{-i\partial}{\partial J_k} \right)^m \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(iQ(x) + iJx) \right]_{J=0}, \quad (8)$$

was offensichtlich richtig ist, da bei jeder Differentiation nach  $-iJ_k$  gerade ein Faktor  $x_k$  im Integral produziert wird. Auf das verbleibende Integral möchten wir (5) anwenden. Dazu müssen wir verlangen, dass die quadratische Form  $Q$  nicht-ausgeartet ist, so dass die zu der Koeffizientenmatrix  $\{q_{ij}\}$  inverse Matrix  $\{q^{ij}\}$  existiert. Die in (5) auftretende Konstante ist in jedem Summanden  $Z_k^{(m)}$  dieselbe, wir können sie also in (7) vor die Summe ziehen. Letztendlich ergibt sich damit eine Potenzreihe in  $k^{-1/2}$ , nämlich

$$Z_k = ck^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!k^{m/2}} \left[ \left( \sum_{i,j,k} f_{ijk} \frac{-i\partial}{\partial J_i} \frac{-i\partial}{\partial J_j} \frac{-i\partial}{\partial J_k} \right)^m \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i,j} q^{ij} J_i J_j\right) \right]_{J=0}. \quad (9)$$

### Eichfixierung

Wir begründen die Notwendigkeit einer Eichfixierung in der Chern-Simons-Theorie und folgen über ein endlich-dimensionales Beispiel der Fadeev-Popov-Methode. Aus physikalischen Motiven erläutern wir kurz den Übergang zur BRST-Kohomologie.

**Bezug zum Chern-Simons-Wirkungsfunktional.** Wir möchten letztendlich die im letzten Abschnitt gewonnenen Resultate über Integrale der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp ik \left( Q(x) + \sum_{i,j,k} f_{ijk} x_i x_j x_k \right) \quad (10)$$

anwenden. Dazu war es notwendig, dass die quadratische Form  $Q(x)$  nicht-ausgeartet ist.

Im Fall der Chern-Simons-Wirkung identifizieren wir

$$Q(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA) \quad (11)$$

als quadratische Form. Entlang einer Eichbahn eines flachen Zusammenhanges  $\alpha$  ist diese Form konstant: sie nimmt beim infinitesimal eichtransformierten Zusammenhang

$$g^* \alpha = \alpha + t d^\alpha f + \mathcal{O}(t^2)$$

denselben Wert

$$Q(g^* \alpha) = \int_M \text{tr} \left( \alpha \wedge d\alpha + t df \wedge \left( d\alpha + \frac{1}{2} [\alpha \wedge \alpha] \right) + \mathcal{O}(t^2) \right) = Q(\alpha) + \mathcal{O}(t^2)$$

an. Diese durch die Eichsymmetrie verursachte Entartung verhindert eine Behandlung mit den oben vorgestellten Methoden. Die Eichung muss daher fixiert werden.

**Endlich-dimensionale Eichfixierung.** Wir werden uns hier an einem endlich-dimensionalen Beispiel klar machen, wie eine Eichfixierung funktioniert. Dazu betrachten wir eine  $l$ -dimensionale Liegruppe  $\Gamma$ , die frei auf  $\mathbb{R}^n$  operiert, und eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die invariant unter dieser Operation ist, das heißt es gilt  $f(\gamma.x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\gamma \in \Gamma$ .

Wir wählen eine Fixier-Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , die auf jeder Bahn  $\Gamma.x$  genau eine Nullstelle hat. Wir betrachten zu einem beliebigen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  die Abbildung

$$\varphi_x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^l : \gamma \rightarrow F(\gamma.x),$$

die wir uns als Parametrisierung der  $l$ -dimensionalen Bahn  $\Gamma.x$  durch die Gruppe  $\Gamma$  vorstellen. Dann gilt für die Volumenformen an der Stelle  $x$ , also für  $\gamma = 1$ , die Gleichung

$$\text{vol}_{\Gamma.x} = \det(D\varphi_x|_1) \text{vol}_G.$$

Wir verfolgen hier die folgende Philosophie: Man betrachte das Integral der Funktion  $f(x)$  über  $\mathbb{R}^n$ , und durchlaufe diesen gemäß der Partitionierung in Bahnen von  $\Gamma$ . Ersetze dann das Integral über jede Bahn durch den Beitrag an der Nullstelle  $x$  von  $F$  in dieser Bahn, multipliziert mit dem Volumen der Bahn. Drücke dieses Volumen durch die Funktionaldeterminante von  $\varphi_x$  und das konstante Gruppenvolumen aus.

Das Herauspicken der Nullstelle von  $F$  drücken wir durch die Dirac'sche Deltafunktion  $\delta(F(x))$  aus. Das Gruppenvolumen ziehen wir als für jede Bahn konstanten Faktor  $c$  vor das Integral. Dann formulieren wir als erste Hypothese

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(ikf(x)) = c \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(ikf(x)) \delta(F(x)) \det(D\varphi_x|_1).$$

Eine zweite Hypothese ist, dass der Ausdruck

$$\delta(F(x)) \det(D\varphi_x|_1) \tag{12}$$

unabhängig von der Wahl von  $F$  ist, dass wir also keine zusätzlichen Wahlen getroffen haben. Die zweite Hypothese soll so motiviert sein, dass sich bei einem Variablenwechsel in der Deltafunktion gerade eine entsprechende Funktionaldeterminante ergibt.

Für beide Hypothesen scheinen keine strikten Beweise zu existieren. Wir werden sie aber ohnehin später ohne weiteres auf den Fall des unendlich-dimensionalen Raumes  $\mathcal{A}_M$  anwenden.

Wir wollen nun dem Term (12) eine physikalische Bedeutung in Form von Feldern geben. Die Deltafunktion stellen wir dazu als Fourier-Transformierte mit einer neuen Variablen  $\phi \in \mathbb{R}^l$  dar,

$$\delta(F(x)) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{\mathbb{R}^l} \exp(iF(x)\phi) d^l \phi.$$

Für die Jacobi-Determinante führen wir zwei unabhängige,  $\mathbb{R}^l$ -wertige Grassmann-Zahlen  $c, \bar{c}$  ein, das heißt es gilt

$$\{c, c\} = \{\bar{c}, \bar{c}\} = 0 \text{ und } [c, \bar{c}] = 0.$$

Für eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt mittels Berezin-Integration

$$\int d^l \bar{c} d^l c \exp(\bar{c} M c) = \det M,$$

was wir hier für  $M = iD\varphi_x|_1$  anwenden.

Auf diese Weise haben wir den Term (12) durch Integrale über ein Exponential ausgedrückt, diese sollen Beiträgen der neuen Felder zur Zustandssumme entsprechen. Der Exponent  $f^{gf}$  heißt Eichfixierungspotential und hat hier die Form

$$f^{gf}(x, \phi, c, \bar{c}) = iF(x)\phi + i\bar{c}(D\varphi_x|_1)c. \quad (13)$$

Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(ikf(x)) d^n x = c \int_{\mathbb{R}^n} \exp ik \left( f(x) + f^{gf}(x, \phi, c, \bar{c}) \right) d^n x d^l \phi d^l \bar{c} d^l c.$$

**Fadeev-Popov-Methode.** Die Übertragung der endlich-dimensionalen Rechnungen des letzten Abschnitts auf den bei der Zustandssumme (1) vorliegenden Fall eines Integrals über den unendlich-dimensionalen Raum  $\mathcal{A}_M$  läuft in der Quantenfeldtheorie unter dem Namen Fadeev-Popov-Methode. Die Liegruppe  $\Gamma$  entspricht nun unserer ebenfalls unendlich-dimensionalen Eichgruppe  $\mathcal{G}$ .

Zunächst müssen wir eine Fixier-Funktion wählen, wobei durchaus verschiedene Möglichkeiten existieren, die sich je nach dem weiteren Vorhaben als mehr oder weniger günstig erweisen. Wir wollen hier die sogenannte Lorentz-Eichung verwenden. Dazu müssen wir eine konforme Struktur als Hilfsgröße wählen, die zusammen mit der schon fixierten Orientierung den Hodge-Operator  $*$  definiert. Dann setzen wir

$$F(A) := d * A = „\partial_\mu A^\mu“,$$

und nehmen an, dass diese Fixier-Funktion auf jeder Eichbahn genau eine Nullstelle  $d * A = 0$  hat. Die Darstellung in lokalen Koordinaten soll einen Bezug zur physikalischen Literatur, z.B. [PeSch],[Be] herstellen.

Dann führen wir analog zu den Variablen  $\phi$ ,  $\bar{c}$  und  $c$  ein Hilfsfeld  $\phi \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$  und Grassmannfelder  $c, \bar{c} \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$  ein, und wollen ein zu (13) analoges Eichfixierungspotential angeben. Dazu müssen wir die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\varphi_A(g) = F(g^* A) = d * g^* A$$

berechnen, betrachten also ihr infinitesimales Verhalten um das Einselement in  $\mathcal{G}$ ,

$$\varphi_A(e^{tf}) = d * A + t(d * d^A f) + \mathcal{O}(t^2),$$

und picken den linearen Term als Differentialoperator

$$D\varphi_A|_1 = d * d^A$$

heraus. Das Eichfixierungspotential in der Lorentzeichung lautet damit

$$S^{gf}(A, \phi, c, \bar{c}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}((d * A) \wedge \phi + \bar{c} \wedge (d * d^A c)). \quad (14)$$

Physikalisch ist dieser Term ein Wirkungsfunktional für die neuen Felder. Es treten keine Ableitungen für das Hilfsfeld  $\phi$  auf, dieses ist also nicht dynamisch und spielt bei den für die Physik interessanten Streuprozessen keine Rolle. Für die Grassmann-Felder aber treten solche Ableitungen auf, sie sind also physikalisch, und wir nennen sie das Geistfeld  $c$  und das Antigeistfeld  $\bar{c}$ . Wir

wollen ihre Natur ein wenig untersuchen und formen das Geist-Wirkungsfunktional im Eichfixierungspotential (14) um. Da  $M$  keinen Rand hat, gilt über die Leibnitz-Regel für  $d$ :

$$\int_M \text{tr} (\bar{c} \wedge (d * d^A c)) = - \int_M \text{tr} (d\bar{c} \wedge (* d^A c)) = \int_M \text{tr} ((* d\bar{c}) \wedge dc - d\bar{c} \wedge [*A, c]). \quad (15)$$

Wir haben so einen kinetischen Term

$$(* d\bar{c}) \wedge dc = „\partial_\mu \bar{c} \partial^\mu c“ \quad (16)$$

und einen Antigeist-Eichboson-Geist-Wechselwirkungsterm, über den wir später noch etwas sagen werden.

Insgesamt sind wir jetzt bei einem vierfachen Pfadintegral

$$Z_k(M) = \int \mathcal{D}\bar{c} \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}A \exp \left( 2\pi i k \left( S_{CS}(A) + S^{gf}(A, \phi, c, \bar{c}) \right) \right) \quad (17)$$

angekommen.

**BRST-Kohomologie.** Durch die Einführung der neuen Felder sind unphysikalische Feldkombinationen möglich, diese erscheinen im Hilbertraum der quantisierten Theorie als Zustände mit negativer Norm. Der Übergang zur BRST-Kohomologie identifiziert diese Zustände mit Null, was wir ganz kurz erläutern werden.

Wir definieren auf dem Raum der Felder, den wir hier nicht genauer spezifizieren werden, zwei Strukturen. Zunächst graduieren wir ihn mit der Geistzahl  $gh$ , indem wir  $gh(A) = gh(\phi) = 0$  und  $gh(c) = -gh(\bar{c}) = 1$  setzen. Die Geistzahl soll sich additiv unter Feldprodukten und konstant unter Ableitungen verhalten. Die zweite Struktur ist der BRST-Operator  $s$ , der auf dem Raum der Felder wirkt und bezüglich des Geistgrades graduiert vom Grad Eins und bezüglich des Formengrades vom Grad Null ist. Wir definieren ihn durch seine Wirkung auf die einzelnen Felder, und zwar

$$\begin{aligned} s(A) &= -d^A c \\ s(c) &= \frac{1}{2} [c, c] \\ s(\bar{c}) &= \phi \\ s(\phi) &= 0 \end{aligned}$$

Der Operator wird auf Feldkombinationen als Geistzahl-graduierte Derivation und mit  $\{s, d\} = 0$  fortgesetzt. Für den BRST-Operator  $s$  gilt  $s^2 = 0$ , was wir hier nicht beweisen wollen. Der Raum der Felder ist also bezüglich der Geistzahl und  $s$  ein Komplex. Zusammen mit dem Formengrad und der äußeren Ableitung haben wir damit einen Bikomplex

		Geistgrad		
		$\xrightarrow{s}$		
		-1	0	1
Formengrad	$\uparrow_d$	1	$A$	
		0	$\bar{c}$	$c$



Physikalische Wirkungsfunktionale enthalten a priori keine Geister, haben also Geistzahl Null. Der Eichfixierungsterm  $S^{gf}$  in (14) hat ebenfalls die Geistzahl Null, kann also zum Chern-Simons-Funktional graduierungsrespektierend addiert werden. Er liegt im Bild von  $s$  mit

$$s \int_M (d * A \wedge \bar{c}) = S^{gf},$$

was man leicht nachrechnen kann.

Der physikalische Hilbertraum, in dem keine Zustände mit negativer Norm mehr leben, ist der Kohomologieraum  $H(s) = \text{Kern}(s) / \text{Bild}(s)$ . Das kann man sich so plausibel machen, dass die hinzuaddierten Terme ja gerade im Bild von  $s$  liegen. Tatsächlich können Geister und Antigeister in physikalischen Reaktionen nicht als Anfangs- oder Endzustände beobachtet werden. Zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten muss man sie aber als innere Übergangszustände mit einkalkulieren. Dieses Verhalten hat ihnen vermutlich ihren Namen eingebracht...

### Berechnung der Zustandssumme

Letztendlich wollen wir eine Vorschrift erhalten, die uns die Berechnung der Zustandssumme

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} \mathcal{D}A \exp(2\pi i k S_{CS}(A)), \quad (18)$$

ermöglicht. Da das Maß  $\mathcal{D}A$  des unendlich-dimensionalen Raumes  $\mathcal{A}_M$ , und damit auch (18) nicht wohldefiniert sind, ist nicht zu erwarten, dass diese Vorschrift formal korrekt sein wird: wenn wir schon mit einem undefinierten Ausdruck starten, müssen wir auch so konsequent sein, dubiose Zwischenschritte zuzulassen. Der wesentliche Trick besteht darin, das Integral auf eine Form zu bringen, die es erlaubt, endlich-dimensionale Berechnungen ohne weitere Prüfung auf den unendlich-dimensionalen Fall zu verallgemeinern. Das leistet die Darstellung als Störungsreihe, deren Resultat im endlich-dimensionalen Fall wir in (9) erhalten haben.

**Zustandssumme als Störungsreihe.** Das Hilfsfeld  $\phi$  hat seinen Sinn dadurch erfüllt, eine einfache Definition des BRST-Operators zu ermöglichen. Wir führen nun in der Zustandssumme (17) das Integral über  $\phi$  aus, wodurch lediglich wieder die Deltafunktion mit der Eichfixierungsbedingung entsteht. Dann haben wir die Zustandssumme

$$Z_k(M) = \int \mathcal{D}\bar{c} \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}A \exp(2\pi i k (S_{CS}(A) + S_{\text{Geist}}(\bar{c}, c))) \delta(d * A)$$

mit dem Geist-Wirkungsfunktional

$$S_{\text{Geist}}(\bar{c}, c) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(( * d\bar{c}) \wedge dc - d\bar{c} \wedge [*A, c]). \quad (19)$$

Wir folgen der Literatur [Ko] und ignorieren die Beiträge der Geister zu Zustandssumme.

Die Eichfixierungsbedingung  $d * A = 0$  geht in die folgende, kurze Überlegung ein. Der für  $A, B \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$  durch die Bedingung

$$\int_M \text{tr}(A \wedge dB) = \int_M \text{tr}(d * A \wedge B)$$

definierte, formal zur äußeren Ableitung  $d$  adjungierte Operator  $d^*$ , ist hier mit  $*^2 = 1$  gegeben durch

$$d^* = (-1)^{k-1} * d * : \Omega^k(M, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M, \mathfrak{g}).$$

Dann fällt der Dirac-Operator

$$D = d + d^* : \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^0(M, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

aufgrund der Eichfixierungsbedingung gerade mit  $d$  zusammen:

$$DA = dA \oplus d^*A = dA \oplus \underbrace{*d^*A}_{=0} = dA.$$

Anstatt der ausgearteten quadratischen Form (11) haben wir für die eichfixierte Wirkung also die quadratische Form

$$Q(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge DA)$$

zu betrachten.

Wir wollen nun die Terme in der endlich-dimensionalen Formel (9) im Fall unseres eichfixierten Chern-Simons-Wirkungsfunktionals identifizieren. Dazu wählen wir zunächst eine Basis  $T^A$  der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ , die orthonormal bezüglich der Spur ist, d.h.  $\text{tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$ .

Beginnen wir mit dem Ausdruck

$$-\frac{i}{2} \sum_{i,j} q^{ij} J_i J_j \quad (20)$$

in (9), dabei war  $J$  eine Quelle, die in demselben Raum lebte wie die Variable  $x$ , die nun unserem Zusammenhang  $A$  entspricht. Deshalb ist  $J$  nun eine  $\mathfrak{g}$ -wertige Einsform auf  $M$ .  $q^{ij}$  waren die Koeffizienten der Inversen der quadratischen Form  $Q$ . In unserem Fall ist die Inverse im wesentlichen gegeben durch den Operator

$$D^{-1} = D \circ (D^2)^{-1} = D \circ \Delta^{-1} : \Omega^k(M, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathfrak{g}).$$

Wir setzen die Existenz der Inversen des Laplace-Operators voraus (man kann das durch die Forderung  $H^*(M, \mathfrak{g}) = 0$  begründen).

$D^{-1}$  ist ein Integraloperator, dessen Wirkung auf  $\mathfrak{g}$ -wertigen Einsformen  $J \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$  wir schreiben als

$$D^{-1}(J_A)(x) = \sum_B \int_{M_y} L_{AB}(x, y) \wedge J_B(y). \quad (21)$$

Der Integralkern  $L$  ist ein Element in  $\Omega^2(M_x \times M_y, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ . Die Indizes am Buchstaben  $M$  sollen lediglich die beiden Kopien von  $M$  unterscheiden. Das Integral in (21) ist dann so zu verstehen, dass das Dachprodukt eine  $\Omega^2(M_x)$ -wertige Dreiform auf  $M_y$  ergibt, diese wird dann über  $M_y$  integriert, und es bleibt ein Element in  $\Omega^2(M_x, \mathfrak{g})$  übrig. Diese Zweiform  $D^{-1}(J)$  multiplizieren wir wieder mit der Einsform  $J$  und integrieren, dann entsteht die Zahl

$$-\frac{i}{2} \sum_A \int_{M_x} J_A(x) \wedge D^{-1}(J_A)(x) = -\frac{i}{2} \sum_{AB} \int_{M_x \times M_y} J_A(x) \wedge L_{AB}(x, y) \wedge J_B(y),$$

die wir als Verallgemeinerung von (20) auffassen. Man beachte, dass sich jede der Summen über den  $\mathbb{R}^n$  in ein Integral über  $M$  und die Summe über  $\mathfrak{g}$  umgewandelt hat,

$$\sum_i \rightsquigarrow \sum_A \int_M,$$

das entspricht genau unserem Übergang  $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ .

Einfacher ist die Identifizierung des kubischen Terms

$$\int_M \text{tr}(A \wedge A \wedge A).$$

Die Strukturkonstanten der Lie-Algebra bezüglich der gewählten Basis  $T^A$  seien  $[T^A, T^B] = f^{ABC} T^C$ . Dann ist

$$\text{tr}(A \wedge A \wedge A) = 2 \text{tr}(A \wedge [A \wedge A]) = \sum_{ABC} f^{ABC} A^A A^B A^C, \quad (22)$$

die Koeffizienten  $\lambda_{ijk}$  in unserem endlich-dimensionalen Fall (9) sind also gerade die Strukturkonstanten.

Unsere verallgemeinerte Formel ist nun die Störungsreihe

$$Z_k(M) = ck^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m Z_k^{(m)}}{m! k^{m/2}}$$

mit den Summanden

$$Z_k^{(m)} = \left[ \left( \int_{M_x \times M_y \times M_z} \sum_{ABC} f^{ABC} \frac{-i\delta}{\delta J_A(x)} \frac{-i\delta}{\delta J_B(y)} \frac{-i\delta}{\delta J_C(z)} \right)^m \exp \left( -\frac{i}{2} \sum_{AB} \int_{M_x \times M_y} J_A(x) \wedge L_{AB}(x, y) \wedge J_B(y) \right) \right]_{J=0} + \text{Beiträge der Geister.}$$

Diese Formel stellt einen prinzipiell berechenbaren, wohldefinierten Ausdruck dar. Eine (natürlich absolut notwendige) Einbeziehung der Geister scheint in der Literatur für die Chern-Simons-Theorie nicht verwirklicht worden zu sein.

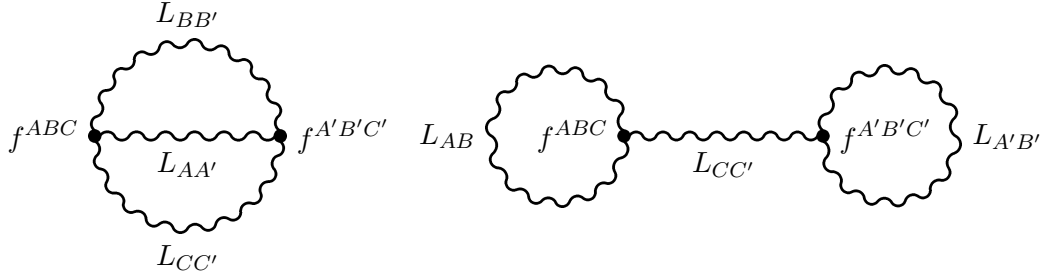
In der Quantenfeldtheorie wendet man das hier prinzipiell vorgestellte Verfahren häufig an. Man zieht die Wechselwirkungsterme, hier den kubischen Term, als Differentialoperator vor das Integral. Es verbleibt die Zustandssumme der freien Theorie, die häufig, wie bei uns über das Gaußsche Integral, berechenbar ist. Der Ausdruck zwischen den Quelltermen  $J$ , bei uns also  $L_{AB}(x, y)$ , definiert den Feynman-Propagator der freien Theorie, der die Bewegung eines Eichbosons von  $x$  und im Zustand  $A$  nach  $y$  in den Zustand  $B$  beschreibt.

**Feynman-Graphen.** Feynman-Graphen sollen nicht nur einen Ausdruck wie die gerade berechnete Zustandssumme visualisieren, sondern können auch in der umgekehrten Richtung anhand von kombinatorischen Überlegungen zu diesem Ausdruck hinführen. Man betrachtet dazu jede Ordnung  $m$  getrennt. Schreiben wir zum Beispiel den Summanden für  $m = 2$  auf, so erhalten wir im wesentlichen zwei Terme

$$Z_k^{(2)}(M) = k_1 \int_{M^6} \sum_{\substack{ABC \\ A'B'C'}} f^{ABC} f^{A'B'C'} L_{AA} L_{BB'} L_{CC'} \quad (23) \\ + k_2 \int_{M^6} \sum_{\substack{ABC \\ A'B'C'}} f^{ABC} f^{A'B'C'} L_{AB} L_{CC'} L_{A'B'},$$

wobei die Konstanten im Prinzip auszurechnen wären. Wir visualisieren die Terme, indem wir die Propagatoren  $L_{AB}$  durch Linien symbolisieren (für Eichbosonen nimmt man üblicherweise geschlängelte Linien) und die Koeffizienten  $f^{ABC}$  durch Wechselwirkungspunkte (Vertizes). Dabei

ziehen wir die Linie für den Propagator zum Beispiel  $L_{AB}$  zum Beispiel von dem Vertex, der einen Index  $A$  hat, zu dem, der einen Index  $B$  hat. Entsprechend der beiden Terme entstehen dadurch die folgenden beiden Diagramme:



Die Feststellung, dass dies alle Diagramme sind, die man zu den gegebenen Arten von Linien und Vertizes zeichnen kann, nutzt man in der Quantenfeldtheorie dazu, die algebraischen Ausdrücke (23) durch das Zeichnen von Diagrammen zu rekonstruieren. Das Zeichnen geschieht gemäß der sogenannten Feynman-Regeln der betrachteten Theorie.

Wir geben im folgenden beispielsweise die Feynman-Regeln für die Chern-Simons-Theorie mit Berücksichtigung der Geister an, vor deren algebraischer Berechnung wir uns gedrückt hatten. Dabei tauchen neben den geschlängelten Eichboson-Linien und dem Eichboson-Selbstkopplungs-Vertex, gestrichelte, gerichtete Linien für das Geist-/Antigeistfeld und der Antigeist-Eichboson-Geist-Vertex aus (19) auf. Die zur Eichfixierung als Hilfsgröße gewählte konforme Struktur drücken wir hier durch Lorentz-Indizes aus, die mit  $*$  hoch- und runtergezogen werden können. Den kinetischen Term des Geist-/Antigeist-Feldes (19) schreiben wir als

$$\begin{aligned} (* d\bar{c}) \wedge dc &= \bar{c} * \Delta c \\ \parallel & \parallel \\ \text{„} \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c &= \bar{c} \partial^\mu \partial_\mu c \text{“} \end{aligned}$$

der Propagator ist also im wesentlichen durch den Integralkern  $L_{AB}^{\text{gh}}$  von  $\Delta^{-1}$  gegeben. Analog zu (22) schreiben wir für den neuen Vertex

$$-d\bar{c} \wedge [*A, c] = \text{„} \sum_{ABC} f^{ABC} A_\mu^A c^B \partial^\mu \bar{c}^C \text{“}.$$

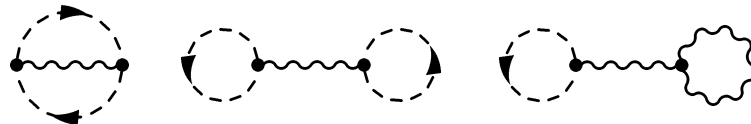
Feynman-Regeln:

- 1) In  $m$ -ter Ordnung zeichne man  $m$  Punkte (Vertizes).
- 2) Man verbinde die Punkte durch geschlängelte (Eichboson-) oder durch gestrichelte, gerichtete (Geist-/Antigeist-) Linien, so dass an jedem Punkt eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist: (a) am Punkt enden drei geschlängelte Linien, dann ist es ein Eichboson-Selbstkopplungsvertex oder (b) am Punkt endet eine geschlängelte Linie, es läuft eine gestrichelte Linie ein und eine gestrichelte Linie aus, in diesem Fall ist der Punkt ein Antigeist-Eichboson-Geist-Vertex.
- 3) Vertexfaktoren: Man beschrifte die Punkte (a) mit den Strukturkonstanten  $f^{ABC}$  und die Punkte (b) mit  $k f^{ABC} \partial^\mu$  (der Faktor  $k$  ergibt sich aus dem Variablenwechsel (6) für den Antigeist-Eichboson-Geist-Wechselwirkungsterm, hier entstehen zwei Faktoren  $\sqrt{k}^{-1}$  weniger als im kubischen Term).

- 4) Man zeichne alle möglichen Diagramme.
- 5) Man multipliziere die Diagramme mit Symmetriefaktoren, die sich aus kombinatorischen Überlegungen (Wick-Theorem...) ergeben.

Die Bestimmung der Symmetriefaktoren kann sehr schwierig werden. Sie liefern die Konstanten  $k_i$  in (23), die natürlich wesentlich in die Berechnung von Streuamplituden von Teilchenreaktionen eingehen.

Nach diesen Regeln ergeben sich in zweiter Ordnung  $m = 2$  zusätzlich zu den oben gezeichneten Diagrammen drei weitere Diagramme, nämlich:



### Literatur

- [AxSi] S. Axelrod & I.M. Singer: *Chern-Simons Perturbation Theory*, in Proc. XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, S. Catto and A. Rocha, eds., World Scientific, 1991, 3-45; II J. Diff. Geom., **39** (1994), 173-213, auch [arxiv:hep-th/9110056](https://arxiv.org/abs/hep-th/9110056).
- [Be] M. Beneke: *Quantenfeldtheorie I + II*, eigenes Vorlesungsskript einer zweisemestrigen Vorlesung an der RWTH Aachen, 2002/03.
- [Fr] D. Freed: *Classical Chern-Simons-Theory*, [arxiv:hep-th/9206021](https://arxiv.org/abs/hep-th/9206021).
- [Ko] T. Kohno: *Conformal Field Theory and Topology*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 210, AMS.
- [PeSch] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [Wi] E. Witten: *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351-399.