

# Holonomie von Gerben im Wess-Zumino-Witten-Modell

von

Konrad Waldorf

Diplomarbeit in PHYSIK

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und  
Naturwissenschaften der RWTH Aachen

im November 2004

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik  
RWTH Aachen

und am

Schwerpunkt für Algebra und Zahlentheorie  
Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Prof. Dr. Werner Bernreuther  
Prof. Dr. Christoph Schweigert



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Wess-Zumino-Witten-Modell</b>	<b>9</b>
2.1	Der kinetische Term . . . . .	9
2.1.1	<i>Konstruktionen mit vektorwertigen Formen</i> . . . . .	9
2.1.2	<i>Maurer-Cartan-Formen</i> . . . . .	12
2.1.3	<i>Die Wirkung des kinetischen Terms</i> . . . . .	13
2.1.4	<i>Variation und Lieableitung</i> . . . . .	14
2.1.5	<i>Bewegungsgleichungen des freien Strings</i> . . . . .	16
2.2	Der Wess-Zumino-Term . . . . .	17
2.2.1	<i>Definition des Wess-Zumino-Terms</i> . . . . .	18
2.2.2	<i>Homologie und integrale Kohomologieklassen von Differentialformen</i> . . . . .	20
2.2.3	<i>Die kanonische Dreiform</i> . . . . .	22
2.2.4	<i>Variation des Wess-Zumino-Terms</i> . . . . .	23
2.3	Erhaltungsgrößen im Wess-Zumino-Witten-Modell . . . . .	24
2.3.1	<i>Symmetrien der Wess-Zumino-Witten-Wirkung</i> . . . . .	24
2.3.2	<i>Bewegungsgleichungen</i> . . . . .	27
2.3.3	<i>Das Wess-Zumino-Witten-Modell als Theorie auf dem doppelten Überlagerungsraum</i> . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Gerben</b>	<b>31</b>
3.1	Deligne-Hyperkohomologietheorie . . . . .	31
3.1.1	<i>Čech-Kohomologietheorie und der Čech-de Rham-Doppelkomplex</i> . . . . .	32
3.1.2	<i>Der Čech-Deligne-Doppelkomplex</i> . . . . .	38
3.1.3	<i>Charakteristische Klasse und Krümmung</i> . . . . .	39
3.1.4	<i>Deligne-Hyperkohomologieklassen gleicher Krümmung</i> . . . . .	43
3.1.5	<i>Holonomie einer Deligne-Klasse</i> . . . . .	45
3.2	Hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang . . . . .	47
3.2.1	<i>Hermitesche Geradenbündel</i> . . . . .	48
3.2.2	<i>Die Chern-Klasse eines hermiteschen Geradenbündels</i> . . . . .	49
3.2.3	<i>Zusammenhang und Krümmung eines Geradenbündels</i> . . . . .	52

3.2.4	<i>Klassifikation von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang</i>	54
3.2.5	<i>Holonomie von Geradenbündeln</i>	56
3.3	Gerben mit Zusammenhang und Krümmung	58
3.3.1	<i>Gerben</i>	59
3.3.2	<i>Die Dixmier-Douady-Klasse einer Gerbe</i>	67
3.3.3	<i>Zusammenhang und Krümmung einer Gerbe</i>	75
3.3.4	<i>Klassifikation von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung</i>	80
3.4	Holonomie von Gerben im Wess-Zumino-Witten-Modell	86
3.4.1	<i>Holonomie von Gerben</i>	86
3.4.2	<i>Das Wess-Zumino-Witten-Modell</i>	87
3.4.3	<i>Lokale Formulierung</i>	88
<b>4</b>	<b>Nichtorientierbare Weltflächen</b>	<b>91</b>
4.1	Dichten auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten	92
4.1.1	<i>Der doppelte Überlagerungsraum</i>	92
4.1.2	<i>Integration auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten</i>	94
4.1.3	<i>Dichten und Formen auf dem doppelten Überlagerungsraum</i>	95
4.1.4	<i>Integration von Dichten</i>	99
4.2	Gerben mit Jandl-Struktur	100
4.2.1	<i>Opponierete Geradenbündel und Gerben</i>	100
4.2.2	<i>Jandl-Struktur</i>	102
4.2.3	<i>Nichtorientierte Stringtheorie auf dem Torus</i>	104
4.2.4	<i>Das Wess-Zumino-Witten-Modell auf nichtorientierbaren Weltflächen</i>	105
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>109</b>

## 1 Einleitung

Wenn wir die Bewegung punktförmiger Teilchen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  unter dem Einfluss elektrischer und magnetischer Felder betrachten, fassen wir die Feldstärken der beiden Felder im antisymmetrischen Feldstärketensor zusammen. Dadurch wird eine Zweiform  $F \in \Omega^2(M)$  definiert, die die Maxwell-Gleichungen

$$dF = 0 \quad \text{und} \quad d \star F = J$$

erfüllt. Die erste Gleichung besagt, dass  $F$  eine geschlossene Differentialform ist. In der zweiten Gleichung gehen im Hodgeschen Sternoperator Metrik und Orientierung von  $M$  ein, und  $J$  beinhaltet Informationen über die vorhandenen Ladungen und Ströme. Wir werden hier nur noch den Fall  $J = 0$  weiterverfolgen, der dem eines leeren Raumes ohne Ladungen und Ströme entspricht. In diesem Fall betrachten wir also eine Theorie, deren Freiheitsgrade zunächst einmal geschlossene Zweiformen zu sein scheinen.

Es ist bequem, die Existenz einer Eichpotential genannten Einsform  $A \in \Omega^1(M)$  mit der Eigenschaft  $dA = F$  anzunehmen. Falls ein solches Eichpotential existiert, ist es im Allgemeinen nicht eindeutig durch die Feldstärke bestimmt, da man von einem Eichpotential über eine Eichtransformation  $A \mapsto A + d\Lambda$  mit einer Funktion  $\Lambda$  auf  $M$  stets zu einem anderen Eichpotential übergehen kann. Da die physikalisch relevanten Informationen der klassischen Theorie aber weiterhin in der Feldstärke  $F$  stecken, sind Messgrößen stets invariant unter solchen Eichtransformationen. Das Eichpotential  $A$  hat hier den Charakter einer Hilfsgröße, die unter Umständen Rechnungen erleichtern kann.

Wir lassen zum Beispiel ein punktförmiges Probetaeilchen der elektrischen Ladung  $e$  entlang einer geschlossenen Trajektorie  $\phi : S^1 \rightarrow M$  im Raum kreisen und beobachten den Einfluss der Feldstärke  $F$ , zu der wir ein Eichpotential  $A$  wählen. Die Bewegungsgleichung des Teilchens erhalten wir durch Variation seiner Wirkung, in der die Kopplung seiner Ladung an das Feld durch den Term

$$S_{\text{kopp}}[\phi] = e \int_{S^1} \phi^* A \tag{1}$$

eingeht. Unter einer Eichtransformation  $A \mapsto A + d\Lambda$  ändert sich dieser Kopplungsterm gemäß des Stokesschen Satzes um das Integral von  $\Lambda$  über die leere Menge  $\partial S^1 = \emptyset$ , er ist also eichinvariant.

Obwohl eine zur elektrischen Ladung analoge magnetische Ladung nie beobachtet wurde, untersuchte P.A.M. Dirac 1931 magnetische Monopole [Di1][Di2]. Nehmen wir

zur Vereinfachung statt einer beliebigen Mannigfaltigkeit den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ , so können wir die Differentialformen bezüglich eines globalen Koordinatensystems in Komponenten zerlegen. Die Komponenten der Feldstärke eines im Ursprung ruhenden magnetischen Monopols der Ladung  $\mu$  sind gegeben [Ga1] durch

$$F^{ij}(x) = \frac{\mu}{2} \cdot \varepsilon^{ijk} \cdot \frac{x_k}{|x|^3}.$$

Aufgrund der Singularität im Ursprung haben wir es also mit einer auf  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  definierten Theorie zu tun. Ein Eichpotential hätte Komponenten  $A^i$  mit der Eigenschaft  $F^{ij} = \frac{1}{2}(\partial^i A^j - \partial^j A^i)$ . Bei der Frage nach der Existenz eines solchen, global definierten Eichpotentials werden nun topologische Eigenschaften des Raumes wichtig. Für zusammenhängende und einfach zusammenhängende Räume wäre das Verschwinden der zweiten Fundamentalgruppe  $\pi_2(M)$  hinreichend für seine Existenz. Diese Bedingung ist aber in unserem Beispiel nicht erfüllt, und man kann sogar zeigen, dass tatsächlich kein auf ganz  $M$  definiertes Eichpotential existiert.

Während das Eichpotential in der klassischen Elektrodynamik nur den Charakter eines bequemen, rechnerischen Hilfsmittels hat, und alle messbaren Größen eichinvariant sind, transformiert die Wellenfunktion  $\psi$  eines Teilchens mit Ladung  $e$  in der Quantenmechanik unter einer Eichtransformation  $A \mapsto A + d\Lambda$  gemäß

$$\psi \mapsto \psi' = \exp(i e \Lambda) \psi.$$

Eine Eichtransformation ändert also die Phase, nicht aber die Amplitude der Wellenfunktion. Einige Zeit lang war man der Meinung, dass eine solche Änderung keine physikalische Relevanz hat, da alle Messgrößen nur von der Amplitude  $|\psi|^2$  abhängen, und diese für  $\psi$  und  $\psi'$  gleich ist. 1959 haben Y. Aharonov und D. Bohm eine (damals schon zehn Jahre alte) Idee von W. Ehrenberg und R.E. Siday aufgegriffen, und darauf hingewiesen [AhBo], dass die relative Phase zweier wechselwirkender Teilchen sehr wohl beobachtbare Konsequenzen haben sollte. Ihre Vermutung wurde experimentell erstmalig 1960 durch R.G. Chambers [Ch], und in neueren Experimenten mit größerer Präzision, z.B. von A. Tonomura et al. [To], bestätigt.

Damit können wir das Eichpotential nicht länger als Hilfsmittel betrachten, sondern müssen es als eine Größe akzeptieren, die zusätzliche physikalische Information trägt. Die Tatsache, dass für das Feld eines magnetischen Monopols kein global definiertes Eichpotential existiert, wird nun zu einem Problem, und wir müssen eine andere Beschreibung finden.

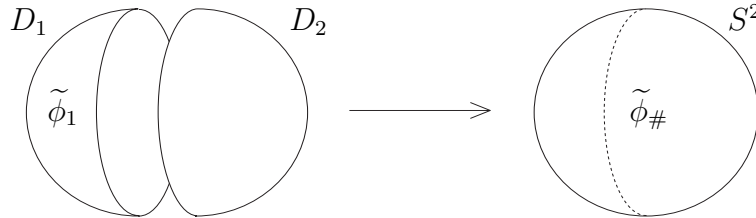
Statt des klassischen Variationsprinzips werden wir nun das Feynmansche Pfadintegral betrachten, in dem die Kopplung eines geladenen Teilchens  $\phi : S^1 \rightarrow M$  an eine Feldstärke  $F$  mit einem Eichpotential  $A$  über eine Amplitude

$$\exp(i S_{\text{kopp}}[\phi]) = \exp\left(ie \int_{S^1} \phi^* A\right) \quad (2)$$

eingeht. Falls nun aber kein global definiertes Eichpotential existiert, betrachten wir zunächst eine Kreisscheibe  $D$ , die vom Parameterbereich  $S^1$  unseres Teilchens umschlossen wird, und die Möglichkeit, die Abbildung  $\phi$  stetig zu einer Abbildung  $\tilde{\phi} : D \rightarrow M$  fortzusetzen. Dann definieren wir die Amplitude

$$\exp \left( ie \int_D \tilde{\phi}^* F \right), \quad (3)$$

die von vorneherein kein Eichpotential benötigt, sich aber, falls eines existiert, über den Stokeschen Satz auf den ursprünglichen Term (2) reduziert. Dafür zahlen wir allerdings den Preis, dass diese Amplitude von der Wahl der Fortsetzung  $\tilde{\phi}$  abhängt, die alles andere als eindeutig ist. Für zwei verschiedene Wahlen kleben wir die beiden Kreisscheiben mitsamt der auf ihnen lebenden Fortsetzungen  $\tilde{\phi}_1$  und  $\tilde{\phi}_2$  entlang ihres Randes zusammen, und erhalten die Kugeloberfläche  $S^2$  mit einer auf ihr gebietsweise definierten Abbildung  $\tilde{\phi}_\#$ .



Dann unterscheiden sich die Amplituden um die Differenz

$$\exp \left( ie \int_{S^2} \tilde{\phi}_\#^* F \right),$$

und die Forderung eines eindeutig definierten Pfadintegrals ist äquivalent dazu, dass der Exponent in dieser Differenz Werte in  $2\pi i\mathbb{Z}$  annimmt. Das ist eine Bedingung an die geschlossene Differentialform  $eF$ , nämlich, dass sie eine sogenannte integrale Kohomologiekategorie definiert.

In unserem oben behandelten Beispiel eines im Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  ruhenden magnetischen Monopols hat dieser Exponent für die Einbettung  $\tilde{\phi} : S^2 \hookrightarrow M$  den Wert  $4\pi i e \mu$ , und unsere Forderung ergibt die Diracsche Quantisierungsbedingung für die elektrische Ladung,  $e = \frac{1}{2} \mu z$  für ein  $z \in \mathbb{Z}$ . Die experimentell bestätigte Erfahrung, dass die elektrische Ladung quantisiert ist, und die Tatsache, dass seit Diracs Entdeckung 1931 keine andere Erklärung für diese Quantisierung gefunden wurde, betonen die physikalische Relevanz dieser Überlegungen.

Heute wissen wir, dass eine  $U(1)$ -Eichtheorie auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  gut in den mathematischen Rahmen eines hermiteschen Geradenbündels  $L$  über  $M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  passt. Die Verknüpfung eines solchen Bündels mit einer Eichtheorie der Feldstärke  $F$  wird über die Krümmung des Zusammenhangs hergestellt; diese ist eine Zweiform  $K(\nabla) \in \Omega^2(M)$ , für die wir  $K(\nabla) = eF$  verlangen. Ein hermitesches Geradenbündel mit Zusammenhang trägt außerdem den Begriff der Holonomie, darunter versteht man eine Zuordnung, die jeder geschlossenen Kurve  $\phi : S^1 \rightarrow M$  eine komplexe Zahl

$\text{hol}(L, \nabla, \phi) \in U(1)$  zuordnet, die wir die Holonomie des Zusammenhangs um  $\phi$  nennen. Wir definieren die Amplitude im Pfadintegral durch

$$\exp(i S_{\text{kopp}}[\phi]) := \text{hol}(L, \nabla, \phi),$$

dabei werden keine Forderungen an die Existenz eines global definierten Eichpotentials oder an die Fortsetzbarkeit der Abbildung  $\phi$  gestellt. Wir werden später sehen, dass sich dieser Ausdruck im Falle der Existenz eines global definierten Eichpotentials zur Feldstärke  $F$ , der dem eines trivialen Geradenbündels entspricht, genau auf (2) reduziert. Wir werden außerdem sehen, dass wir, wenn wir  $\phi$  auf eine Kreisscheibe fortsetzen können, genau den für diesen Fall angenommenen Term (3) zurückerhalten. Mit einem hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang beschreiben wir also eine Theorie, die insbesondere diese beiden Spezialfälle enthält.

Während wir in der Quantenmechanik von Punktteilchen mit Weltlinien  $S^1$  reden, gehen wir in der Stringtheorie zu eindimensionalen Objekten über, deren Ausdehnung über eine weitere Größe parametrisiert wird. Diese kann Werte im Kreis oder in einem Intervall annehmen, und je nach Wahl eines Wertebereichs liegt ein geschlossener beziehungsweise offener String vor. In dieser Arbeit werden wir nur geschlossene Strings betrachten, ihre Trajektorien sind damit Abbildungen  $\phi : \Sigma \rightarrow M$ , wobei die Weltfläche  $\Sigma$  eine geschlossene, zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Wir möchten nun auch Strings an ein Hintergrundfeld einer Feldstärke  $H$  koppeln. Während bei Punktteilchen hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang und Krümmungs-Zweiformalen auftreten, betrachtet man bei einem String solche Geradenbündel über dem Schleifenraum  $LM = \text{Map}(S^1, M)$ . Eine geschlossene Zweiform auf  $LM$  definiert aber eine Dreiform auf  $M$ . Deshalb ist die Feldstärke eines String-Hintergrundfeldes eine Dreiform  $H \in \Omega^3(M)$ . Eine eventuell vorhandene Zweiform  $B \in \Omega^2(M)$  mit der Eigenschaft  $dB = H$  wird Kalb-Ramond-Feld oder B-Feld genannt. In diesem Fall erwarten wir analog zu (1) einen Kopplungsterm

$$S_{\text{kopp}}[\phi] = k \int_{\Sigma} \phi^* B \quad (4)$$

in der Wirkung des Strings, wobei  $k$  eine zur elektrischen Ladung analoge Kopplungskonstante ist. Durch konkrete Modelle werden wir jedoch gezwungen, auch den Fall zu betrachten, dass kein solches global definiertes Hintergrundfeld existiert. Wir versuchen eine zu der Vorgehensweise bei Punktteilchen analoge Methode, und nehmen an, dass die Weltfläche  $\Sigma$  eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$  umschließt, auf die die Abbildung  $\phi$  fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung  $\tilde{\phi} : B \rightarrow M$ . Dann erwarten wir im Feynmanschen Pfadintegral analog zu (3) die Amplitude

$$\exp\left(ik \int_B \tilde{\phi}^* H\right). \quad (5)$$

Der Exponent in diesem Ausdruck trägt den Namen Wess-Zumino-Term, und seine Existenz und Wohldefiniertheit sind einigen Einschränkungen unterworfen. Edward Witten



hat 1984 eine konsistente Theorie aufgestellt, in der  $M$  ein spezieller Typ von Liegruppen ist [Wi]. Diese Theorie wird heute als Wess-Zumino-Witten-Modell bezeichnet und von uns in Abschnitt 2 diskutiert. Wir werden die Einschränkungen an die Wohldefiniertheit des Wess-Zumino-Terms genau untersuchen, und die Bewegungsgleichung eines Strings berechnen, der die Hintergrundfeldstärke  $H$  spührt.

Die Wirkung des Wess-Zumino-Witten-Modells weist eine bestimmte, diskrete Symmetrie auf, die Witten als Paritätssymmetrie bezeichnet hat. Eine genaue Betrachtung dieser Symmetrie in Abschnitt 2.3.3 wird uns zu einer Interpretation führen, derzufolge wir nicht Abbildungen  $\phi : \Sigma \rightarrow M$  zu betrachten haben, sondern solche des doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$ , die invariant unter der Paritätssymmetrie sind. Diese Idee werden wir dann in Abschnitt 4.2.4 wieder aufgreifen.

Nachdem sich der Zugang über eine Fortsetzung der Abbildung  $\phi$  auf die von der Weltlinie umschlossene Scheibe bei punktförmigen Teilchen aus der viel allgemeineren Definition der Amplitude als Holonomie eines hermiteschen Geradenbündels mit Zusammenhang um die Trajektorie  $\phi$  zurückführen ließ, erwarten wir hier eine ähnliche Situation. Allein fehlt uns ein geeignetes Objekt, analog zu einem hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang, dessen Krümmung eine Dreiform ist, die wir durch  $kH$  vorgeben könnten, und dessen Holonomie um Abbildungen nunmehr zweidimensionaler Weltflächen dazu geeignet ist, die gewünschten Amplituden im Pfadintegral zu definieren.

Ein Objekt mit diesen Kennzeichen wurde zu Beginn dieses Jahrtausends gefunden. Es handelt sich um eine hermitesche Bündelgerbe mit Zusammenhang und Krümmung. Die Untersuchung ihrer Eigenschaften und ihrer Anwendungen im Wess-Zumino-Witten-Modell sind der zentrale Gegenstand dieser Arbeit. In Abschnitt 3 werden wir ausführlich Gerben und ihre Analogie zu Geradenbündeln diskutieren. Es wird sich herausstellen, dass die Holonomie einer Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  um  $\phi$  tatsächlich dazu geeignet ist, die Amplitude

$$\exp(i S_{\text{kopp}}[\phi]) := \text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) \tag{6}$$

so zu definieren, dass wir die Ausdrücke (4) und (5) als Spezialfälle reproduzieren können, so wie wir aus der Holonomie von Geradenbündeln die Ausdrücke (2) und (3) zurückgewinnen konnten.

Wie wir schon bei einer  $U(1)$ -Eichtheorie dazu übergegangen sind, nicht mehr die Feldstärke, sondern nur noch das hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang als das die Theorie definierende Objekt anzusehen, vollziehen wir für das String-Hintergrundfeld denselben Schritt. Die entscheidende Größe zur Definition eines String-Hintergrundes ist demnach eine Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung.

Beim Übergang von Weltlinien nulldimensionaler Punktteilchen zu Weltflächen ein-dimensionaler Strings tritt aber noch ein weiteres Problem auf. Alle bisher verwendeten Kopplungsterme involvieren Integrale von Differentialformen über die Weltfläche oder einen von ihr umschlossenen Raum; das trifft auch für die Holonomie (6) zu. Solche Integrale sind aber nur wohldefiniert, nachdem man im Integrationsbereich eine Orientierung

gewählt hat. Während man auf jeder eindimensionalen Mannigfaltigkeit eine solche Wahl treffen kann, indem man zum Beispiel an einem Punkt eine Durchlaufrichtung fixiert, und diese dann entlang der Linie beibehält, gibt es zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, die keine Wahl einer Orientierung zulassen. Auf solchen, nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten sind Integrale über Differentialformen nicht wohldefiniert, ebensowenig sind es also unsere Kopplungsterme. Prominente Beispiele solcher Flächen sind das Möbiusband und die Kleinsche Flasche, wobei die letztere eine geschlossene Fläche ist, und damit für uns als Weltfläche in Betracht kommt.

In der Stringtheorie vom Typ I sind wir gezwungen, auch nichtorientierbare Weltflächen zu berücksichtigen. Als Voraussetzung ihrer Behandlung in Abschnitt 4 werden wir, motiviert durch unsere Interpretation der Paritätssymmetrie im Wess-Zumino-Witten-Modell, den Begriff dieser Symmetrie geeignet erweitern, und dann Abbildungen  $\tilde{\phi} : \hat{\Sigma} \rightarrow M$  des doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$  der Weltfläche betrachten, die invariant unter dieser Symmetrie sind.

Wir werden zur Formulierung von Wirkungsfunktionalen auf nichtorientierten Flächen in dieser Arbeit erstmals auf den Formalismus einer verallgemeinerten Art von Differentialformen, sogenannter Dichten zurückgreifen. Dabei handelt es sich um Objekte, die auch über nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten integriert werden können. Wir werden einen Zusammenhang zwischen Dichten auf einer Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  und Differentialformen auf ihrem doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  erarbeiten.

Dann schlagen wir in Abschnitt 4.2 eine Möglichkeit vor, Gerben zur Beschreibung des Wess-Zumino-Terms auf nichtorientierbaren Weltflächen einzusetzen. Eine Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung ist demnach nicht ausreichend, um die Kopplung eines Strings mit nichtorientierbarer Weltfläche an ein Hintergrundfeld zu beschreiben. Es wird eine Zusatzstruktur benötigt, die wir definieren und Jandl-Struktur nennen werden. Dabei werden wir den Begriff der opponierten Gerbe einführen, der zentral für die Definition der Jandl-Struktur sein wird, und den wir genauso wie diese als analoge Definitionen zu Strukturen in einer algebraischen Betrachtung [FuRuSch] nichtorientierbarer, topologischer Feldtheorien gewonnen haben.

Schon vor über zehn Jahren wurden durch Berechnungen von M. Bianchi, G. Pradisi und A. Sagnotti für den speziellen Fall einer nichtorientierbaren Stringtheorie auf dem Torus  $M = \mathbb{T}^2$  durch die Untersuchung des Bulkspektrums Einschränkungen an die Art der möglichen Hintergrundfelder gefunden [BiPraSa][Bi]. Auch die Existenz einer Jandl-Struktur auf einer Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung ist mit bestimmten Einschränkungen an die Gerbe verbunden, und wir werden in Abschnitt 4.2.3 zeigen, dass diese im Falle einer Jandl-Struktur auf einer Gerbe über dem Torus mit den von Bianchi et. al. gefundenen übereinstimmt.

Neben dieser Übereinstimmung wird das Ergebnis der Diskussion unserer Definition einer Jandl-Struktur sein, dass sie nicht ausreicht, um mit einer Gerbe mit Zusammenhang, Krümmung und Jandl-Struktur ein Hintergrundfeld einer nichtorientierten Stringtheorie vollständig zu beschreiben. Wir können jedoch zeigen, dass die Amplituden (6) für eine Gerbe mit Jandl-Struktur immerhin bis auf ein Vorzeichen wohldefiniert sind.

Wir müssen die Vermutung, dass man durch eine geeignete Erweiterung der Definition einer Jandl-Struktur durch weitere Wahlen auch dieses Vorzeichen fixieren kann, weiterer Arbeit überlassen.

Ich möchte mich bei Christoph Schweigert für die beste Betreuung, die ich mir überhaupt vorstellen kann, bedanken. Er hat mich stets mit viel Energie angesteckt und mit außergewöhnlichem Engagement motiviert. Jens Fjelstad, Uwe Semmelmann und Gregor Weingart haben sich immer viel Zeit für meine Fragen genommen. Der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, insbesondere Werner Bernreuther, und der Universität der Freien und Hansestadt Hamburg danke ich für die reibungslose Zusammenarbeit, die diese Arbeit ermöglicht hat.



## 2 Das Wess-Zumino-Witten-Modell

In diesem Abschnitt untersuchen wir das 1984 von Witten entworfene Wess-Zumino-Witten-Modell in seiner klassischen Formulierung, ohne Gerben zu verwenden. Das Wess-Zumino-Witten-Modell ist eine spezielle Art eines nichtlinearen  $\sigma$ -Modells, darunter versteht man Theorien von Feldern, die Werte in einer Mannigfaltigkeit annehmen. Bei unserer Diskussion schränken wir uns dabei von vorneherein auf kompakte, einfache, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppen ein und werden an den entsprechenden Stellen erläutern, warum diese Einschränkungen nötig sind. Bei unserer Beschreibung des Wess-Zumino-Witten-Modells werden wir ausgiebig von den Vorteilen, die die Gruppenstruktur der Liegruppe bietet, Gebrauch machen, und eine koordinatenfreie und damit manifest kovariante Beschreibung der Theorie angeben.

Die Wirkung des Wess-Zumino-Witten-Modells setzt sich aus einem kinetischen Term und dem schon erwähnten Wess-Zumino-Term zusammen. Im Abschnitt 2.1 werden wir den kinetischen Term besprechen und parallel auf die für uns notwendige Differentialgeometrie von Liegruppen eingehen. Im Abschnitt 2.2 definieren wir den Wess-Zumino-Term und schildern die Besonderheiten seiner Definition. Das Zusammenspiel der beiden Terme wird im Abschnitt 2.3 erläutert.

**2.1 Der kinetische Term.** Zur Vorbereitung beginnen wir mit einigen allgemeingültigen Aussagen über Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten und spezialisieren uns dann auf Liegruppen. Mannigfaltigkeiten sind in der gesamten Arbeit immer glatt und endlich-dimensional.

**2.1.1 Konstruktionen mit vektorwertigen Formen.** Auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$  wählen wir eine Orientierung und eine Metrik  $g$ . Eine Differentialform  $\alpha \in \Omega^k(M)$  auf  $M$  fassen wir als einen differenzierbaren Schnitt im äußeren Bündel  $\Lambda^k T^*M$  über  $M$  auf. Für einen reellen Vektorraum  $W$  ist eine  $W$ -wertige Differentialform  $\alpha \in \Omega^k(M, W)$  ein differenzierbarer Schnitt im Tensorprodukt  $\Lambda^k T^*M \otimes W$ . Wenn wir eine Basis  $(T_1, \dots, T_n)$  von  $W$  wählen, können wir eine solche Form zerlegen in eine Summe  $\alpha = \alpha^i T_i$  mit  $\alpha^i \in \Omega^k(M)$ . Anhand einer solchen Zerlegung überträgt man die bekannten Wirkungen des Hodgeschen Sternoperators

$$\star : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M),$$

der äußeren Ableitung  $d$ , sowie des Zurückziehens  $f^*$  durch Abbildungen  $f : X \longrightarrow M$  auf Differentialformen auch auf vektorwertige Differentialformen. Wenn wir eine Riemannsche Metrik gewählt haben, so gilt  $\star \star \beta = (-1)^{k(n-k)} \beta$  für eine vektorwertige Differentialform  $\beta \in \Omega^k(M, W)$ .

Zur Definition des Dachproduktes vektorwertiger Formen müssen wir eine Bilinearform  $\varrho : W \times W \longrightarrow V$  fixieren, wobei  $V$  ein zweiter reeller Vektorraum, zum Beispiel  $\mathbb{R}$ , ist. Dann setzen wir für zwei  $W$ -wertige Differentialformen  $\alpha \in \Omega^p(M, W)$  und  $\beta \in \Omega^q(M, W)$

$$\alpha \wedge_{\varrho} \beta := \alpha^i \wedge \beta^j \cdot \varrho(T_i, T_j) \in \Omega^{p+q}(M, V).$$

Die Metrik  $g$  auf  $M$  definiert eine (genauso bezeichnete) Metrik  $g$  auf dem Vektorraum  $\Omega^k(M)$ . Wenn wir nun auch eine Metrik  $\kappa : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$  auf  $W$  wählen, so wird durch

$$g_{\kappa}(\alpha, \beta) := g(\alpha^i, \beta^i) \cdot \kappa(T_i, T_j)$$

für zwei  $W$ -wertige Formen  $\alpha, \beta \in \Omega^p(M, W)$  auch eine Metrik  $g_{\kappa}$  auf dem Vektorraum  $\Omega^p(M, W)$  definiert. Wenn wir die durch die Metrik und die Orientierung von  $M$  bestimmte Volumenform mit  $\text{vol} \in \Omega^n(M)$  bezeichnen, so ergibt sich aus der den Hodge'schen Sternoperator definierenden Eigenschaft für vektorwertige Differentialformen die Eigenschaft

$$\alpha \wedge_{\kappa} \star \beta = g_{\kappa}(\alpha, \beta) \cdot \text{vol}. \quad (7)$$

Wir werden jetzt zwei Spezialfälle des Dachproduktes vektorwertiger Differentialformen verwenden und deren Eigenschaften diskutieren.

LEMMA 2.1A. *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra mit Lieklammer*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

*$M$  eine Mannigfaltigkeit und  $\alpha$  und  $\beta$  zwei  $\mathfrak{g}$ -wertige Formen von den Graden  $p$  bzw.  $q$ . Wir definieren die  $\mathfrak{g}$ -wertige Form*

$$[\alpha, \beta] := \alpha \wedge_{[\cdot, \cdot]} \beta \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{g}).$$

*Sie erfüllt die Vertauschungsregel  $[\alpha, \beta] = (-1)^{pq+1} [\beta, \alpha]$ .*

*Beweis.* Wir zerlegen die beiden Formen in  $\alpha = \alpha^i T_i$  und  $\beta = \beta^i T_i$  bezüglich einer Basis  $T_i$  von  $\mathfrak{g}$  in Formen  $\alpha^i \in \Omega^p(M)$  und  $\beta^i \in \Omega^q(M)$ . Unter Verwendung der Vertauschungsregel  $\alpha^i \wedge \beta^j = (-1)^{pq} \beta^j \wedge \alpha^i$  für reellwertige Formen und der Antisymmetrie der Lieklammer ergibt sich aus der Definition

$$[\alpha, \beta] = \alpha^i \wedge \beta^j \cdot [T_i, T_j] = (-1)^{pq} \beta^j \wedge \alpha^i \cdot (-1) [T_j, T_i] = (-1)^{pq+1} [\beta, \alpha].$$

□

Wir demonstrieren kurz das Einsetzen von Tangentialvektoren in eine solche Form an einem Beispiel mit  $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ , einem Punkt  $x \in M$  und zwei Tangentialvektoren  $v, w \in T_x M$ . Die Definition des Dachproduktes und die Antisymmetrie der Lieklammer ergeben  $[\alpha, \alpha]_x(v, w) = 2[\alpha_x(v), \alpha_x(w)]$ . Damit kommen wir zum zweiten Beispiel von vektorwertigen Formen.

LEMMA 2.1B. *Sei  $\kappa$  eine symmetrische Bilinearform auf der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ ,  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $\alpha$  und  $\beta$  zwei  $\mathfrak{g}$ -wertige Formen von den Graden  $p$  bzw.  $q$ . Wir schreiben*

$$\kappa(\alpha, \beta) := \alpha \wedge_{\kappa} \beta \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{g}).$$

*Diese Form hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gilt die Vertauschungsregel*

$$\kappa(\alpha, \beta) = (-1)^{pq} \kappa(\beta, \alpha).$$

(ii) *Für den Hodgeschen Sternoperator gilt*

$$\kappa(\star\alpha, \beta) = (-1)^{(n-p)q} \kappa(\alpha, \star\beta).$$

(iii) *Sie erfüllt eine graduierte Leibnitzregel*

$$d\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(d\alpha, \beta) + (-1)^p \kappa(\alpha, d\beta).$$

(iv) *Ist  $\kappa$  zusätzlich invariant, das heißt  $\kappa$  erfüllt*

$$\kappa([A, B], C) = \kappa(A, [B, C])$$

*für alle  $A, B$  und  $C$  in  $\mathfrak{g}$ , und ist  $\gamma$  eine dritte  $\mathfrak{g}$ -wertige Form, so gilt*

$$\kappa(\alpha, [\beta, \gamma]) = \kappa([\alpha, \beta], \gamma).$$

*Beweis.* Wir zerlegen die Formen  $\alpha$  und  $\beta$  bezüglich einer Basis  $\{T_i\}_{i \in I}$  von  $\mathfrak{g}$  in Komponenten  $\alpha^i \in \Omega^p(M)$  und  $\beta^i \in \Omega^q(M)$ . Eigenschaft (i) kann analog zu Lemma 2.1A gezeigt werden, nur das statt der antisymmetrischen Lieklammer hier eine symmetrische Bilinearform verwendet wird. Zur Eigenschaft (ii) benutzen wir (i) für die  $(n-p)$ -Form  $\star\alpha$  und die  $q$ -Form  $\beta$  und haben  $\kappa(\star\alpha, \beta) = (-1)^{(n-p)q} \kappa(\beta, \star\alpha)$ . Weiter ist nach Definition  $\kappa(\beta, \star\alpha) = \beta \wedge_{\kappa} (\star\alpha) = g_{\rho}(\beta, \alpha) \text{ vol}$ . Da  $g$  und  $\kappa$ , und damit auch  $g_{\kappa}$  symmetrisch sind,  $g_{\rho}(\beta, \alpha) = g_{\rho}(\alpha, \beta)$ , haben wir  $\kappa(\beta, \star\alpha) = \kappa(\alpha, \star\beta)$ . Daraus folgt die Behauptung. Eigenschaft (iii) ist die übliche Leibnitzregel  $d(\alpha^i \wedge \beta^i) = d\alpha^i \wedge \beta^i + (-1)^p \alpha^i \wedge d\beta^i$  für das Dachprodukt, und um (iv) zu zeigen, schreiben wir von beiden Seiten die Zerlegung hin, nämlich

$$\kappa(\alpha, [\beta, \gamma]) = \alpha \wedge_{\kappa} (\beta \wedge_{[\cdot, \cdot]} \gamma) = \alpha^i \wedge (\beta^j \wedge \gamma^k) \cdot \kappa(T_i, [T_j, T_k])$$

und

$$\kappa([\alpha, \beta], \gamma) = (\alpha \wedge_{[\cdot, \cdot]} \beta) \wedge_{\kappa} \gamma = (\alpha^i \wedge \beta^j) \wedge \gamma^k \cdot \kappa([T_i, T_j], T_k),$$

die Invarianz von  $\kappa$  und die Assoziativität des Dachproduktes von Formen zeigen die Gleichheit.  $\square$

2.1.2 *Maurer-Cartan-Formen.* Nach den recht allgemeinen Aussagen über Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten werden wir nun den für das Wess-Zumino-Witten-Modell interessanten Fall besprechen, in dem die Mannigfaltigkeit eine Liegruppe  $M = G$  ist. Liegruppen sind Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Gruppenstruktur, für die die Gruppenmultiplikation  $\mu : G \times G \rightarrow G$  und die Inversenabbildung  $\text{Inv} : G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$  differenzierbare Abbildungen sind. Wir identifizieren den Tangentialraum am Einselement mit der Liealgebra,  $\mathfrak{g} := T_1G$ .

Wir nennen eine  $k$ -Differentialform  $\omega \in \Omega^k(G)$  invariant unter einem Diffeomorphismus  $\varphi : G \rightarrow G$ , wenn  $\varphi^*\omega = \omega$  gilt. Insbesondere nennen wir eine Form links- bzw. rechtsinvariant, wenn sie unter der Linksmultiplikation  $\varphi = l_g$  bzw. der Rechtsmultiplikation  $\varphi = r_g$  mit allen Elementen  $g \in G$  invariant ist. Die in Lemma 2.1B (iv) auftretende ebenfalls invariant genannte Bilinearform  $\kappa$  entspricht dem Spezialfall  $G = \mathfrak{g}$  und  $\varphi = \text{Ad}_g$ , wobei  $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  die adjungierte Wirkung der Liegruppe  $G$  auf ihrer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  ist, wir werden daher im folgenden die Bezeichnung Ad-Invarianz verwenden.

Wir definieren nun zwei  $\mathfrak{g}$ -wertige Differentialformen auf  $G$ , die von der Gruppenstruktur Gebrauch machen. Die Maurer-Cartan-Form  $\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$  ist punktweise an einem Punkt  $g \in G$  gegeben durch

$$\theta_g := (\text{dl}_g|_1)^{-1} : T_gG \mapsto \mathfrak{g}.$$

Als Differential des Diffeomorphismus  $l_g$  ist  $\theta_g$  linear und bijektiv, und damit ein Vektorraumisomorphismus zwischen dem Tangentialraum an jedem Punkt und der Liealgebra. Die Maurer-Cartan-Form ist linksinvariant, und wird daher besser linksinvariante Maurer-Cartan-Form genannt. Sie erfüllt die Cartansche Strukturgleichung (z.B. [Na1], Eq. 4.10.3)

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0. \quad (8)$$

Analog haben wir die rechtsinvariante Maurer-Cartan-Form  $\bar{\theta}$ , definiert durch  $\bar{\theta}_g := (\text{dr}_g|_1)^{-1}$ .

Wir leiten nun zwei Beziehungen zwischen den beiden Maurer-Cartan-Formen her. Zunächst betrachten wir die Inversenabbildung  $\text{Inv}$  der Gruppe und berechnen punktweise die mit  $\text{Inv}$  zurückgezogene rechtsinvariante Maurer-Cartan-Form:

$$\begin{aligned} (\text{Inv}^*\bar{\theta})|_g &= \bar{\theta}_{\text{Inv}(g)} \circ \text{dInv}|_g = \text{d}(r_g \circ \text{Inv})|_g \\ &= \text{d}(\text{Inv} \circ l_g^{-1})|_g = \text{dInv}|_1 \circ \theta_g. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\text{dInv}|_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ist nicht anderes als der Vorzeichenwechsel in der Liealgebra. Damit gelten

$$\theta = -\text{Inv}^*\bar{\theta} \quad \text{und} \quad \bar{\theta} = -\text{Inv}^*\theta, \quad (9)$$

die Inversenabbildung wechselt also bis auf ein Vorzeichen rechts- und linksinvariante Maurer-Cartan-Form aus. Wenden wir diese Regel auf die Cartansche Strukturgleichung



an, so erhalten wir

$$-d\bar{\theta} + \frac{1}{2} [\bar{\theta}, \bar{\theta}] = 0,$$

die rechtsinvariante Maurer-Cartan-Form erfüllt damit eine Strukturgleichung mit anderem Vorzeichen.

Wir betrachten nun eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow G$  von Mannigfaltigkeiten und berechnen an einem Punkt  $p \in M$  die mit  $f$  nach  $M$  zurückgezogene rechtsinvariante Maurer-Cartan-Form:

$$f^*\bar{\theta}|_p = \bar{\theta}_{f(p)} \circ df|_p = (dr_{f(p)}|_1)^{-1} \circ df|_p = dc_{f(p)}|_1 \circ f^*\theta|_p,$$

dabei ist  $c_h : G \rightarrow G : a \mapsto hah^{-1}$  die Konjugationsabbildung der Gruppe. Deren bei Eins ausgewertetes Differential ist gerade die adjungierte Darstellung  $\text{Ad}_h := dc_h|_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  von  $G$  auf ihrer Liealgebra, also können wir auch

$$f^*\bar{\theta}|_p = \text{Ad}_{f(p)} \circ f^*\theta|_p \tag{10}$$

schreiben. Im Spezialfall  $M = G$  und  $f = \text{id}_G$  ergibt sich eine neue Regel. Dabei sehen wir  $\text{Ad}$  nun als Schnitt im trivialen  $\mathfrak{g}$ -Endomorphismenbündel  $G \times \text{End } \mathfrak{g}$ , der einem Gruppenelement  $g \in G$  gerade den Endomorphismus  $\text{Ad}_g$  zuordnet. Das Faserprodukt mit dem Formenbündel ergibt das triviale Bündel

$$\begin{array}{c} \text{End } \mathfrak{g} \times (\Lambda^k T^*G \otimes \mathfrak{g}) \\ \downarrow \\ G. \end{array}$$

Einen Schnitt  $(\varphi, \omega)$  identifizieren wir punktweise mit der Form  $\varphi(\omega) \in \Omega^k(G, \mathfrak{g})$  durch

$$\varphi(\omega)|_g := \varphi_g \circ \omega_g.$$

Damit wird (10) zu

$$\bar{\theta} = \text{Ad}(\theta). \tag{11}$$

Damit schließen wir die rein mathematische Diskussion ab und versuchen im nächsten Abschnitt, den kinetischen Term des Wess-Zumino-Witten-Modells mithilfe der gesammelten Informationen zu definieren.

**2.1.3 Die Wirkung des kinetischen Terms.** Wie angekündigt werden wir nur geschlossene und orientierbare Weltflächen behandeln, und daher eine zweidimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  ohne Rand betrachten, auf der eine Metrik  $h$  und eine Orientierung fixiert sei. Da von allen kompakten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten nur der Torus eine Metrik mit Lorentz-Signatur erlaubt [FuSch], wir uns aber nicht darauf einschränken wollen, nehmen wir also eine Riemannsche Metrik an. Wir werden später sehen, dass das Wess-Zumino-Witten-Modell als klassische Feldtheorie konform

invariant ist, also nur von der konformen Äquivalenzklasse von  $h$  abhängt. Weiter sei  $G$  eine kompakte, einfache, zusammenhängende, einfach zusammenhängende Liegruppe.

Die Wirkung  $S_{\text{kin}}$  ist ein Funktional auf dem Raum  $\text{Map}(\Sigma, G)$  der stetigen Abbildungen  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  hat die Gestalt eines Integrals über eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}[\phi] \in \Omega^2(\Sigma)$ , nämlich

$$S_{\text{kin}}[\phi] = \frac{k}{2} \int_{\Sigma} \mathcal{L}[\phi]. \quad (12)$$

$k$  ist eine zu diesem Zeitpunkt nicht näher bestimmte Konstante. Wir motivieren die Lagrangedichte durch ihren physikalischen Bezug. Sie soll Geschwindigkeiten enthalten, also Ableitungen von  $\phi$ . Da  $\phi$  gruppenwertig ist, nehmen die Ableitungen Werte in der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  an und werden durch die Einsform  $\phi^*\theta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$  gestellt. Für Matrixliegruppen schreibt man auch  $\phi^*\theta = \phi^{-1}d\phi$ . Da die Geschwindigkeit im kinetischen Term quadratisch eingehen soll, müssen wir also ein definites, inneres Produkt auf  $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$  verwenden. Dazu wählen wir eine definite, Ad-invariante, symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , und bekommen das durch sie und die Metrik  $h$  bestimmte, definite innere Produkt  $h_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  auf  $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ . Dann sollte der kinetische Term den Ausdruck

$$\langle \phi^*\theta, \phi^*\theta \rangle : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

enthalten. Die Wahl von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entspricht der Wahl einer Metrik auf  $G$ . Da wir eine einfache, also auch halbeinfache Gruppe vorausgesetzt haben, existiert mit der Killingform  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \text{tr}$  immer eine solche Wahl.

Die Lagrangedichte soll eine Volumenform sein, wir fügen deshalb noch die durch die Metrik  $h$  und die Orientierung von  $\Sigma$  gegebene Standardvolumenform  $\text{vol}$  hinzu. Damit nimmt der kinetische Term aber gerade die Gestalt der rechten Seite in (7) an, und wir definieren die Lagrangedichte entsprechend als

$$\mathcal{L}[\phi] := \langle \phi^*\theta, \star \phi^*\theta \rangle. \quad (13)$$

Wir schreiben  $\mathcal{L}[\phi]$  kurz in lokalen Koordinaten an. Dazu sei  $x^\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Karte von  $\Sigma$ , bezüglich der sich die Form  $\phi^*\theta$  zerlegen lässt in  $\phi^*\theta = (\phi^*\theta)_\mu dx^\mu$  mit Funktionen  $\phi^{-1}\partial_\mu\phi := (\phi^*\theta)_\mu : \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$ . Damit ergibt sich

$$S_{\text{kin}}[\phi] = \frac{k}{2} \int h^{\mu\nu} \langle \phi^{-1}\partial_\mu\phi, \phi^{-1}\partial_\nu\phi \rangle dx^1 \wedge dx^2,$$

in Übereinstimmung z.B. mit [Ga1] oder [Wi].

**2.1.4 Variation und Lieableitung.** Als nächstes wollen wir durch eine Variation der Wirkung  $S_{\text{kin}}[\phi]$  die Bewegungsgleichungen eines freien Strings auf der Liegruppe  $G$

herleiten. Dazu diskutieren wir zunächst kurz, wie wir infinitesimale Variationen der Abbildung  $\phi : \Sigma \longrightarrow G$  vornehmen. In dem folgenden, kommutativen Diagramm von Vektorbündeln

$$\begin{array}{ccc} \iota^{-1}TG & \xrightarrow{\partial_1} & TG \\ \downarrow \partial_2 & & \downarrow \pi \\ \phi(\Sigma) & \xrightarrow{\iota} & G \end{array}$$

ist das mit der Inklusion  $\iota : \phi(\Sigma) \hookrightarrow G$  zurückgezogene Bündel das Faserprodukt  $\iota^{-1}TG = \phi(\Sigma) \times_G TG$ , explizit also

$$\iota^{-1}TG = \{(g, v) \in \phi(\Sigma) \times TG \mid v \in T_gG\},$$

die Abbildungen  $\partial_i$  sind dabei so definiert, dass sie aus einem Tupel den  $i$ -ten Eintrag weglassen. Dieses Bündel beinhaltet zu jedem Punkt im Bild von  $\phi$  die möglichen Richtungen, in die  $\phi$  variiert werden kann.

Gegeben sei nun ein differenzierbarer Schnitt  $\delta\phi$  in diesem Bündel, wir fixieren also auf eine glatte Weise zu jedem Punkt im Bild von  $\phi$  eine dieser Richtungen. Den Schnitt nennen wir Variationsvektorfeld zur Abbildung  $\phi$ . Es sei  $\Phi$  der zum Variationsvektorfeld  $\delta\phi$  gehörende lokale Fluss, das heißt eine Abbildung  $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times g(\Sigma) \longrightarrow G$ , so dass  $\Phi(0, \cdot)$  die Identität auf  $G$  ist, und deren durch teilweises Einsetzen definierte Kurven  $\Phi_g : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G : t \longmapsto \Phi(t, g)$  an jedem Punkt  $g$  im Bild von  $\phi$  Integralkurven des Variationsvektorfeldes  $\delta\phi$  durch  $g$  sind. Dieser Fluss parametrisiert über den ersten Parameter die Stärke der Variation in der durch  $\delta\phi$  festgelegten Richtung. Wir können auch eine weitere Abbildung  $\Phi_t : g(\Sigma) \longrightarrow G : g \longmapsto \Phi(t, g)$  definieren, die jedem Punkt im Bild von  $\phi$  den variierten Punkt zuordnet. Das definiert die Variation  $\phi_t := \Phi_t \circ \phi : \Sigma \longrightarrow G$  mit  $\phi_0 = \phi$ .

Der Variationsoperator  $\delta$  wird definiert auf von  $\phi$  abhängigen Ausdrücken  $F[\phi]$ , die im Allgemeinen in irgendeiner Mannigfaltigkeit  $W$  leben dürfen. Die Zuordnung  $t \longmapsto F[\phi_t]$  ist eine Kurve in  $W$  durch den Punkt  $F[\phi] = F[\phi_0]$  und wir definieren

$$\delta F[\phi] := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F[\phi_t] \in T_{F[\phi]}W$$

als den Tangentialvektor in diesem Punkt.

In den hier auftretenden Anwendungen wird  $W$  immer ein Vektorraum sein, für den man die Tangentialräume kanonisch mit  $W$  identifizieren kann, so dass also  $\delta F[g]$  wieder ein Element von  $W$  ist. Für den Fall des reellen Vektorraumes  $W = \Omega^k(\Sigma)$  können wir folgendes, nützliche Lemma angeben.

LEMMA 2.1C. *Sei  $\phi : \Sigma \longrightarrow G$  eine stetige Abbildung,  $\delta\phi$  ein Variationsvektorfeld mit Fluss  $\Phi$  und  $\alpha \in \Omega^k(G)$  eine Differentialform auf  $G$ . Dann ist*

$$\delta(\phi^*\alpha) = \phi^*(\text{Lie}_{\delta\phi}\alpha),$$

wobei  $\text{Lie}_X$  die Lie-Ableitung bezüglich des Vektorfeldes  $X$  bezeichnet.

*Beweis.* Wir setzen die Definition des Variationsoperators ein und rechnen

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t \circ \phi)^* \alpha = \phi^* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* \alpha \right).$$

In der Klammer steht aber genau die Definition der Lie-Ableitung  $\text{Lie}_{\delta\phi} \alpha$ . Sowohl  $\phi^* \alpha$  als auch  $\delta(\phi^* \alpha)$  sind Elemente von  $\Omega^k(\Sigma)$ .  $\square$

**2.1.5 Bewegungsgleichungen des freien Strings.** Wir haben nun den von  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  abhängigen Ausdruck  $S_{\text{kin}}[\phi] : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  zu variieren. Es sei also  $\delta\phi$  ein Variationsvektorfeld und  $\phi_t$  die Variation der Abbildung  $\phi$ . Den Variationsoperator  $\delta$  ziehen wir unter das Integral,

$$\delta S_{\text{kin}}[\phi] = \frac{k}{2} \int_{\Sigma} \delta \mathcal{L}[\phi].$$

Per Definition ist  $\delta \mathcal{L}[\phi] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{L}[\phi_t]$ . Wir nutzen die Bilinearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , um bezüglich  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$  eine Leibnitzregel anwenden zu dürfen. Desweiteren vertauschen  $\star$  und  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$ , und es bleibt

$$\delta \mathcal{L}[\phi] = \langle \delta(\phi^* \theta), \star \phi^* \theta \rangle + \langle \phi^* \theta, \star \delta(\phi^* \theta) \rangle.$$

Gemäß der Punkte (i) und (ii) des Lemmas 2.1B sind die beiden Summanden genau gleich,

$$\delta \mathcal{L}[\phi] = 2 \langle \delta(\phi^* \theta), \star \phi^* \theta \rangle. \quad (14)$$

Wir müssen also lediglich die Variation der nach  $\Sigma$  zurückgezogenen Maurer-Cartan-Form berechnen. Unter Verwendung von Lemma 2.1C und der Cartanschen Homotopieformel

$$\text{Lie}_X \alpha = d(X \rfloor \alpha) + X \rfloor (d\alpha), \quad (15)$$

wobei wir mit  $\rfloor$  das innere Produkt von Vektorfeldern mit Differentialformen bezeichnen, haben wir unmittelbar

$$\delta(\phi^* \theta) = \phi^* (\text{Lie}_{\delta\phi} \theta) = \phi^* (d(\delta\phi \rfloor \theta) + \delta\phi \rfloor d\theta).$$

Im ersten Summanden vertauschen  $d$  und  $\phi^*$ , im zweiten verwenden wir die Strukturgleichung (8) und erhalten  $\phi^* (\delta\phi \rfloor d\theta) = -\frac{1}{2} \phi^* (\delta\phi \rfloor [\theta, \theta])$ . Bei der Berechnung des inneren Produktes wird ein Faktor 2 produziert, nämlich  $\delta\phi \rfloor [\theta, \theta] = 2 [\delta\phi \rfloor \theta, \theta]$ , insgesamt ergibt sich also

$$\delta(\phi^* \theta) = d\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta) - [\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta), \phi^* \theta].$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (14) ein, die Variation der Lagrangedichte zerfällt also in zwei Summanden,

$$\delta \mathcal{L}[\phi] = 2 \langle d\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta), \star \phi^* \theta \rangle - 2 \langle [\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta), \phi^* \theta], \star \phi^* \theta \rangle.$$

Wir zeigen nun, dass der zweite Summand verschwindet. Dazu ziehen wir den Hodge-Operator gemäß Lemma 2.1B (ii) unter einem Vorzeichenwechsel auf die andere Seite, dort ist

$$\star [\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta), \phi^* \theta] = [\phi^* (\delta\phi \rfloor \theta), \star \phi^* \theta].$$

Nach Punkt (i) desselben Lemmas vertauschen wir ohne Vorzeichenwechsel die Argumente von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , nutzen die Invarianz und vertauschen letztendlich gemäß Lemma 2.1A die Argumente von  $[\cdot, \cdot]$  ohne Vorzeichenwechsel. Diese Umformungen überführen den zweiten Summanden unter insgesamt einem Vorzeichenwechsel in sich selbst, er verschwindet also.

Im ersten Summanden verwenden wir die Leibnitzregel (iii) aus Lemma 2.1B, nämlich

$$\langle d\phi^* (\delta\phi] \theta), \star\phi^*\theta \rangle = d \langle \phi^* (\delta\phi] \theta), \star\phi^*\theta \rangle - \langle \phi^* (\delta\phi] \theta), d \star\phi^*\theta \rangle,$$

das entspricht einer partiellen Integration unter dem Weltflächenintegral. Da wir eine Weltfläche ohne Rand,  $\partial\Sigma = \emptyset$ , vorausgesetzt hatten, verschwindet der Randterm unter dem Integral nach dem Stokesschen Satz,

$$\int_{\Sigma} d \langle \phi^* (\delta\phi] \theta), \star\phi^*\theta \rangle = \int_{\partial\Sigma} \langle \phi^* (\delta\phi] \theta), \star\phi^*\theta \rangle = 0.$$

Damit ist die Variation der Wirkung berechnet zu

$$\delta S_{\text{kin}} [\phi] = -k \int_{\Sigma} \langle \phi^* (\delta\phi] \theta), d \star\phi^*\theta \rangle. \quad (16)$$

Da wir eine definite und damit nichtausgeartete Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gewählt haben, und  $\delta\phi] \theta$  beliebige Werte in  $\mathfrak{g}$  annimmt, erfordert das Prinzip der minimalen Wirkung  $\delta S_{\text{kin}} [\phi] = 0$  unbedingt das Verschwinden des zweiten Arguments, also die Bewegungsgleichung

$$d \star\phi^*\theta = 0.$$

Betrachten wir diese Gleichung wieder auf der Karte  $x^\mu : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , so dass wir auf  $U$  die Zerlegung  $\phi^*\theta = \phi^{-1} \partial_\mu \phi dx^\mu$  haben. Die Hodge-duale Form ist  $\star\phi^*\theta = \varepsilon_{\mu\nu} \phi^{-1} \partial^\mu \phi dx^\nu$  und ihre äußere Ableitung ist  $d\star\phi^*\theta = \varepsilon_{\mu\nu} d(\phi^{-1} \partial^\mu \phi) \wedge dx^\nu$ . Die Einsform  $d(\phi^{-1} \partial^\mu \phi)$  zerlegen wir weiter in Komponenten  $d(\phi^{-1} \partial^\mu \phi) = \partial_\rho (\phi^{-1} \partial^\mu \phi) dx^\rho$  und mit  $dx^\rho \wedge dx^\nu = \varepsilon^{\rho\nu} dx^1 \wedge dx^2$  und  $\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\rho\nu} = \delta_\mu^\rho$  nimmt die Bewegungsgleichung die Gestalt

$$\partial_\mu (\phi^{-1} \partial^\mu \phi) = 0$$

an.

**2.2 Der Wess-Zumino-Term.** Wir haben den Wess-Zumino-Term in der Einleitung als einen Kopplungsterm eines String an ein Hintergrundfeld mit Feldstärke  $H$  eingeführt. Edward Witten war in seiner grundlegenden Arbeit [Wi] von anderen Gründen motiviert worden. Sein Ausgangspunkt war die Bosonisierung einer Theorie eines fermionischen Feldes  $\psi$  mit einer (eventuell nicht abelschen) Symmetriegruppe. Er führte bosonische, gruppenwertige Felder  $\phi = \exp(i\psi)$  ein, und suchte eine Wirkung für  $\phi$ , die die erhaltenen Größen der fermionischen Theorie reproduziert. Allein der kinetische Term erbrachte

dieses Resultat nicht, woraufhin er den Wess-Zumino-Term hinzufügte und die gewünschten erhaltenen Größen fand.

Es gibt auch noch weitere Gründe dafür, andere Terme zu der String-Wirkung hinzuzunehmen. Quantisiert man nämlich eine Theorie, die nur durch den kinetischen Term beschrieben wird, so verliert sie die konforme Invarianz (die wir noch zeigen müssen), es tritt also eine Anomalie auf. Eine Theorie aus kinetischem und Wess-Zumino-Term behält ihre konforme Invarianz; wir werden aber nicht weiter darauf eingehen.

Wir werden den Wess-Zumino-Term als Integral der Hintergrundfeldstärke  $H$  über eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$  definieren, deren Rand die Weltfläche  $\Sigma$  ist. Wir müssen außerdem die Abbildung  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  zu einer Abbildung  $\tilde{\phi}$  auf ganz  $B$  fortsetzen. Zunächst haben wir also zu prüfen, ob überhaupt solche Mannigfaltigkeiten  $B$  und Abbildungen  $\tilde{\phi} : B \rightarrow G$  existieren. Wir werden sehen, dass hier die oben schon geforderten Eigenschaften der Liegruppe, nämlich dass sie kompakt, einfach, zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist, eingehen.

Sodann müssen wir untersuchen, wie sich verschiedene Wahlen von  $B$  und  $\phi$  auf die Bewegungsgleichungen und die erhaltenen Größen auswirken. Ihre Unabhängigkeit von diesen Wahlen stellt Bedingungen an die Dreiform  $H$ , nämlich dass sie eine integrale Kohomologieklass in der de Rham-Kohomologie von  $G$  definiert. Das werden wir zunächst motivieren und dann ein paar grundlegende Dinge zu integralen Kohomologieklassen sagen. Schließlich werden wir eine Reihe von Dreiformen auf  $G$  konstruieren, die integrale Kohomologieklassen definieren, und die Variation des Wess-Zumino-Terms berechnen.

**2.2.1 Definition des Wess-Zumino-Terms.** Wir benötigen eine orientierbare, dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$ , deren Rand die Weltfläche ist,  $\partial B = \Sigma$ . Ihre Existenz ist gesichert, wenn man einige Sätze berücksichtigt. Ein Satz von Thom besagt, dass eine geschlossene, zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  genau dann Rand einer Mannigfaltigkeit  $B$  ist, wenn ihre Fundamentalklasse kein Produkt von Stiefel-Whitney-Klassen von  $\Sigma$  ist ([Bre], VI. Thm. 17.9). Das trifft insbesondere zu, wenn  $\Sigma$  zweidimensional, geschlossen und orientierbar ist, aber zum Beispiel auch für die Kleinsche Flasche ([Bre], VI. Cor. 10.6f). Diese dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$  ist orientierbar, wenn  $\Sigma$  orientierbar ist, was wir in diesem Abschnitt vorausgesetzt hatten.

Wir wählen eine solche dreidimensionale Mannigfaltigkeit und statten sie mit der Orientierung aus, die auf dem Rand eine zu der Orientierung von  $\Sigma$  äquivalente Orientierung induziert. Wir bezeichnen mit  $\iota : \Sigma \hookrightarrow B$  die Inklusion des Randes  $\Sigma = \partial B$  in  $B$ . Als nächstes wollen wir eine Abbildung  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  stetig zu einer Abbildung  $\tilde{\phi}$  auf  $B$  fortsetzen, das heißt wir suchen ein  $\tilde{\phi} : B \rightarrow G$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \phi & \uparrow \tilde{\phi} \\ \Sigma & \xrightarrow{\iota} & B \end{array}$$

kommutiert, also  $\phi = \tilde{\phi} \circ \iota$  bzw.  $\tilde{\phi}|_{\Sigma} = \phi$ . Die allgemeine Diskussion dieses sogenannten Fortsetzungsproblems ist sehr umfangreich, und wird zum Beispiel im Kapitel VII.13 in

[Bre] geführt. Die Möglichkeit einer Fortsetzung wird im wesentlichen durch die Topologie von  $G$  entschieden. Dabei geht ein wichtiger Satz von Cartan ein, den wir hier nur zitieren werden.

SATZ 2.2A (E. Cartan, z.B. Proposition 5.4.5 in [Bry]). *Sei  $G$  eine kompakte, einfache und einfach zusammenhängende Liegruppe, so dass ihre Liealgebra einfach ist. Dann ist  $G$  auch zweifach zusammenhängend,*

$$\pi_2(G) = 0,$$

und ihre dritte Homologiegruppe  $H_3(G)$  ist kanonisch isomorph zu den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ .

Ein Teil der angekündigten Voraussetzungen an die Liegruppe  $G$  geht also in diesen Satz ein. Wir werden vor allem Gebrauch vom Verschwinden der zweiten Fundamentalgruppe machen, zusammen mit den Eigenschaften zusammenhängend,  $\pi_0(G) = 0$ , und einfach zusammenhängend,  $\pi_1(G) = 0$ , haben wir also eine sogenannte zwei-zusammenhängende Liegruppe. Eine Abbildung auf dem Rand einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit in einen zweizusammenhängenden Raum  $G$  kann zu einer Abbildung auf die ganze Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden. Diese Aussage kann man zum Beispiel aus ([Bre], VII. Cor. 13.13) folgern.

Wir wählen also eine solche Fortsetzung  $\tilde{\phi} : B \rightarrow G$  aus und definieren den Wess-Zumino-Term als

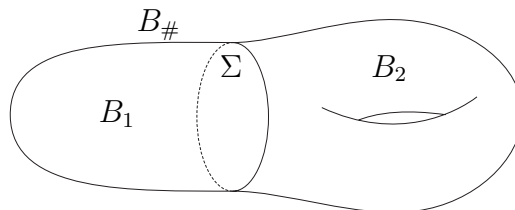
$$S_{\text{WZ}}[\tilde{\phi}, B] = k \int_B \tilde{\phi}^* H. \tag{17}$$

Dabei ist  $k$  dieselbe Konstante wie im kinetischen Term, und  $H \in \Omega^3(G)$  eine geschlossene Dreiform, nämlich die Feldstärke des Hintergrundfeldes, an das der String  $\phi$  koppeln soll. Diese Definition hängt von den Wahlen von  $\phi$  und  $B$  ab, wir werden aber sehen, dass diese sich unter geeigneten Voraussetzungen an  $H$  und  $k$  nicht auf die klassischen Bewegungsgleichungen oder auf die Amplituden im Pfadintegral auswirken.

Wir vergleichen zwei Wahlen  $\tilde{\phi}_1 : B_1 \rightarrow G$  und  $\tilde{\phi}_2 : B_2 \rightarrow G$  und berechnen die Differenz der Wess-Zumino-Terme

$$d := S_{\text{WZ}}[\tilde{\phi}_1, B_1] - S_{\text{WZ}}[\tilde{\phi}_2, B_2] = k \left( \int_{B_1} \tilde{\phi}_1^* H + \int_{B_2} \tilde{\phi}_2^* H \right).$$

Wir bilden die verbundene Summe  $B_{\#} := B_1 \# B_2$ , dabei werden  $B_1$  und  $B_2$  mit entgegengesetzten Orientierungen entlang ihres gemeinsamen Randes  $\Sigma = \partial B_1 = \partial B_2$  zusammengeklebt. Es entsteht die dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B_{\#}$  ohne Rand, die wir folgenden Bild (in einer um eins kleineren Dimension) zeigen. Diese Konstruktion ist analog zu der in der Einleitung skizzierten Vorgehensweise bei Punktteilchen.



Auf  $B_{\#}$  definieren wir eine Abbildung  $\tilde{\phi}_{\#} : B_{\#} \rightarrow G$  durch  $\tilde{\phi}_{\#}|_{B_i} = \tilde{\phi}_i$  für  $i = 1, 2$ . Das ergibt nach der Voraussetzung  $\tilde{\phi}_1|_{\Sigma} = \tilde{\phi}_2|_{\Sigma}$  eine stetige Abbildung. Damit ist

$$d = k \int_{B_{\#}} \tilde{\phi}_{\#}^* H. \quad (18)$$

Aus Sicht des klassischen Variationsprinzips müssen wir also verlangen, dass sich  $d$  unter infinitesimalen Variationen nicht ändert, aus Sicht der Quantenmechanik verlangen wir dass  $d$  Werte in  $2\pi\mathbb{Z}$  annimmt, so dass der Beitrag der Differenz zur Amplitude im Pfadintegral verschwindet,

$$\exp i \left( S_{\text{wz}}[\tilde{\phi}_1, B_1] - S_{\text{wz}}[\tilde{\phi}_2, B_2] \right) = \exp(i d) = 1.$$

Integrale einer geschlossenen Differentialform über geschlossene Mannigfaltigkeiten werden auch die Perioden der Differentialform genannt. Wir müssen also verlangen, dass die Perioden von  $k\tilde{\phi}_{\#}^* H$  in  $2\pi\mathbb{Z}$  liegen. Formen mit solchen Perioden repräsentieren genau integrale Kohomologieklassen, die wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

*2.2.2 Homologie und integrale Kohomologieklassen von Differentialformen.* Integrale Kohomologieklassen von Differentialformen sind ein Produkt des Zusammenwirkens mehrerer Homologietheorien auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , nämlich der singulären Homologie, und der de Rham-Kohomologie. Beide sind bestimmte Funktoren von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten in die der abelschen Gruppen. Die de Rham-Kohomologiegruppen  $H_{\text{dR}}^k(M)$  sind die Kohomologiegruppen des de Rham-Komplexes  $\Omega^{\bullet}(M)$  von Differentialformen, dessen Differential die äußere Ableitung ist. Die singuläre Homologie von  $M$  wird durch in die Mannigfaltigkeit eingebettete  $k$ -Simplizes und damit allein durch topologische Eigenschaften von  $M$  bestimmt. Solche Simplizes erzeugen frei die singulären Kettenmoduln  $\Delta_k(M)$ , die wiederum mit dem Randoperator der Simplizes den singulären Kettenkomplex bilden. Die Homologiegruppen dieses Komplexes sind die singulären Homologiegruppen  $H_k(M)$ . Für unsere Zwecke ist es ausreichend, sich eine Klasse in  $H_k(M)$  als Repräsentanten einer  $k$ -dimensionalen, geschlossenen Untermannigfaltigkeit vorzustellen.

Die zu den singulären Kettenmoduln bezüglich einer abelschen Gruppe  $A$  dualen, singulären Kokettenmoduln  $\Delta^k(M, A) := \text{Hom}(\Delta_k(M), A)$  bilden den singulären Kokettenkomplex, dessen Kohomologiegruppen mit  $H^k(M, A)$  bezeichnet werden. Die Abhängigkeit zwischen singulären Homologie- und Kohomologiegruppen wird durch das Universelle-Koeffizienten-Theorem (z.B. [BoTu], Thm. 15.14)

$$H^k(M, A) = \text{Hom}(H_k(M), A) \oplus \text{Ext}(H_{k-1}(M), A) \quad (19)$$

angegeben. In der kategoriellen Sprache ist  $H^k(\cdot, \cdot)$  ein Bifunktor, der in der ersten Komponente kontra- und in der zweiten kovariant ist. Beide Eigenschaften nutzen wir aus, und betrachten dazu erstens zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ , eine Koeffizientengruppe  $A$  und eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$ . Die Kontravarianz von  $H^k(\cdot, A)$  äußert



sich darin, dass der induzierte Gruppenhomomorphismus  $f^* : H^k(N, A) \longrightarrow H^k(M, A)$  im Vergleich zu  $f$  in die andere Richtung läuft. Zweitens betrachten wir nun eine feste Mannigfaltigkeit  $M$  und zwei Koeffizientengruppen  $A$  und  $B$  mit einem Gruppenhomomorphismus  $\varphi : A \longrightarrow B$ . Die Kovarianz von  $H^k(M, \cdot)$  ergibt einen induzierten Gruppenhomomorphismus  $\varphi^* : H^k(M, A) \longrightarrow H^k(M, B)$ , der in dieselbe Richtung läuft wie  $\varphi$ . Beispielsweise werden wir noch häufiger die (aus Konvention etwas seltsame) Inklusion ganzer Zahlen in die reellen Zahlen  $\iota : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto 2\pi z$  als Homomorphismus abelscher Gruppen betrachten, und den induzierten Gruppenhomomorphismus  $\iota^* : H^k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(M, \mathbb{R})$  verwenden.

Das Integral einer Differentialform  $\omega \in \Omega^k(M)$  über eine geschlossene Untermannigfaltigkeit  $U$  in  $M$ , repräsentiert durch eine Homologieklassse  $[\sigma]$ , definiert eine Paarung

$$H_{\text{dR}}^k(M) \times H_k(M) \longrightarrow \mathbb{R} : ([\omega], [\sigma]) \longmapsto \int_{\sigma} \omega, \quad (20)$$

wobei der Wert des Integrals gemäß des Stokesschen Satzes unabhängig von der Wahl der Vertreter  $\omega, \sigma$  ist. Diese Paarung definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{dR} : H_{\text{dR}}^k(M) \longrightarrow \text{Hom}(H_k(M), \mathbb{R}) = H^k(M, \mathbb{R}),$$

wobei die Gleichheit daraus folgt, dass die Ext-Gruppen  $\text{Ext}(\cdot, \mathbb{R})$  verschwinden. Der Satz von de Rham (z.B. Theorem 9.1 in [Bre]) besagt nun, dass die Paarung (20) nicht-entartet ist, oder äquivalent, dass  $\text{dR}$  ein Isomorphismus ist. Dieser wichtige Isomorphismus verbindet also topologische und die differentialtopologische Informationen der Mannigfaltigkeit  $M$ .

Integrale Kohomologieklassen sind nun per Definition solche Klassen in  $H_{\text{dR}}^k(M)$ , die im Bild der Abbildung

$$\iota_{\mathbb{Z}} := \text{dR}^{-1} \circ \iota^* : H^k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M) \quad (21)$$

liegen. Betrachten wir wieder eine Abbildung  $f : M \longrightarrow N$  von Mannigfaltigkeiten, die induzierte Abbildung  $f^* : H^k(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(M, \mathbb{Z})$  von singulären Kohomologiegruppen und das übliche Zurückziehen von Klassen von Differentialformen  $f^*[\omega] = [f^*\omega]$  durch  $f$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(N, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^k(M, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \iota_{\mathbb{Z}} & & \downarrow \iota_{\mathbb{Z}} \\ H_{\text{dR}}^k(N) & \xrightarrow{f^*} & H_{\text{dR}}^k(M) \end{array}$$

Definiert also eine geschlossene Form  $\omega$  eine integrale Kohomologieklassse in  $H_{\text{dR}}^k(N)$ , so definiert auch  $f^*\omega$  eine integrale Kohomologieklassse  $[f^*\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$ .

Wir spezialisieren uns nun wieder auf Liegruppen  $M = G$ , die die Voraussetzungen von Satz 2.2A erfüllen. Unser Interesse liegt auf Dreiformen, die eine integrale Kohomologieklassse in  $H_{dR}^3(G)$  definieren. Da gemäß Satz 2.2A mit  $\pi_2(G)$  auch  $H_2(G)$  verschwindet, bleibt im Universellen-Koeffizienten-Theorem (19) lediglich  $H^3(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_3(G), \mathbb{Z})$ . Wenn wir die Paarung (20) im ersten Argument auf  $\text{im}(\iota_{\mathbb{Z}})$  einschränken, bleibt eine Paarung

$$\text{im}(\iota_{\mathbb{Z}}) \times H_3(G) \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z},$$

wobei hier der Faktor  $2\pi$  auftritt, den wir in die Definition von  $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  eingebaut hatten. Für eine geschlossene  $k$ -Form  $\omega$ , die eine integrale Kohomologieklassse  $[\omega] \in \text{im}(\iota_{\mathbb{Z}})$  definiert, bedeutet das, dass ihr Integral über eine beliebige, geschlossene  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $U$  nur Werte in  $2\pi\mathbb{Z}$  annimmt.

**2.2.3 Die kanonische Dreiform.** Auf jeder kompakten, einfachen, und einfach zusammenhängenden Liegruppe kann eine Reihe geschlossener Dreiformen, die eine integrale Kohomologieklassse definieren, explizit konstruiert werden. Dazu verwenden wir, dass gemäß Satz 2.2A für solche Liegruppen die Gruppen  $H_3(G)$  und  $\mathbb{Z}$  kanonisch isomorph sind. Wir fixieren den Generator  $\gamma = 1$  von  $H_3(G)$ . Gemäß einer detaillierten Diskussion in [PrSe] gibt es eine eindeutige, rechts- und linksinvariante (sogenannte biinvariante) Dreiform  $\nu_1 \in \Omega^3(G)$ , so dass  $\int_{\gamma} \nu_1 = 2\pi$  ist. Diese Form heißt die kanonische Dreiform von  $G$ . Ein weiterer Satz von Cartan (auch in Proposition 5.4.5 in [Bry]) besagt, dass die kanonische Dreiform  $\nu_1$  unter den Voraussetzungen von Satz 2.2A den Vektorraum der biinvarianten Dreiformen auf  $G$  erzeugt.

Nachdem jede geschlossene, dreidimensionale Untermannigfaltigkeit  $U$  von  $G$  durch eine Homologieklassse in  $H_3(G)$  repräsentiert wird, und diese ein ganzzahliges Vielfaches des Erzeugers  $\gamma$  sein muss, nehmen Integrale der kanonischen Dreiform über solche Untermannigfaltigkeiten gemäß unserer Diskussion im letzten Abschnitt Werte in  $2\pi\mathbb{Z}$  an. Außerdem wissen wir, dass biinvariante Formen stets geschlossen sind. Damit repräsentiert  $\nu_1$  eine integrale Kohomologieklassse. Alle anderen biinvarianten Dreiformen, die eine integrale Kohomologieklassse repräsentieren, müssen ganzzahlige Vielfache  $\nu_n = n\nu_1$  der kanonischen Dreiform sein.

Wir wollen nun  $\nu_1$  explizit angeben und verwenden dabei die im kinetischen Term auftretende definite, symmetrische, Ad-invariante Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Durch

$$\eta(X, Y, Z) := \langle X, [Y, Z] \rangle \quad (22)$$

für  $X, Y$  und  $Z$  in  $\mathfrak{g}$  wird eine Trilinearform definiert, die aufgrund der Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  alternierend ist. Wir definieren weiter die  $\mathfrak{g}$ -wertige Dreiform

$$H := \frac{1}{6} \eta(\theta, \theta, \theta), \quad (23)$$

sie ist per Definition linksinvariant. Wir benutzen die Ad-Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  punktweise für den Liealgebren-Automorphismus  $\varphi = \text{Ad}_g$  und erhalten  $\langle \theta, [\theta, \theta] \rangle =$

$\langle \text{Ad}(\theta), [\text{Ad}(\theta), \text{Ad}(\theta)] \rangle$ , also gemäß (11)  $\eta(\theta, \theta, \theta) = \eta(\bar{\theta}, \bar{\theta}, \bar{\theta})$ ,  $H$  ist also auch rechts-, damit biinvariant und folglich geschlossen,  $dH = 0$ .

Die in (23) definierte Form  $H$  stimmt mit der kanonischen Dreiform überein, wenn man eine zusätzliche Normierungsbedingung an  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stellt. Dazu haben wir den folgenden

**SATZ 2.2B[PRSE].** *Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine symmetrische, Ad-invariante Bilinearform auf  $\mathfrak{g}$ , die so normiert ist, dass die Kowurzel  $\check{\alpha}$  zu jeder langen Wurzel  $\alpha$  die quadrierte Länge  $\langle \check{\alpha}, \check{\alpha} \rangle = 4\pi$  hat. Dann ist die in (23) definierte Form  $H$  die kanonische Dreiform auf  $G$ .*

Wir fixieren nun die Normierung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gemäß der Forderung dieses Satzes, und haben damit die kanonische Dreiform  $H = \nu_1$ , und für  $k \in \mathbb{Z}$  eine Reihe weiterer Formen  $kH = \nu_k$  definiert, die integrale Kohomologieklassen repräsentieren.

Unsere Forderung, dass die Differenz  $d$  in (18) Werte in  $2\pi\mathbb{Z}$  annimmt, und so die Wohldefiniertheit der durch den Wess-Zumino-Term gegebenen Amplitude zu gewährleistet, werden wir nun dadurch erfüllen, dass wir uns bei der Feldstärke des Hintergrundfeldes auf die kanonische Dreiform  $H$ , und bei der Kopplungskonstante  $k$  auf ganze Zahlen festlegen, so dass  $kH$  eine integrale Kohomologieklass definiert. In diesem Zusammenhang nennen wir  $k \in \mathbb{Z}$  auch den Level der Theorie.

Diese Einschränkung können wir analog zu der in der Elektrodynamik auftretenden Forderung sehen, dass für eine Feldstärke  $F \in \Omega^2(M)$  die Zweiform  $eF$  eine integrale Kohomologieklass definiert. Die Quantisierung der Kopplungskonstante  $k$  ist dabei analog zu der Diracschen Quantisierungsbedingung an die elektrische Ladung  $e$ .

Wir haben also über die Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $G$  eine Dreiform  $H$  konstruiert. Nachdem wir eine bestimmte Normierung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gewählt haben, und die Voraussetzungen an die Liegruppe  $G$  berücksichtigen, ist  $H$  die kanonische Dreiform, die eine integrale Kohomologieklass definiert. Wählen wir außerdem noch den Level  $k \in \mathbb{Z}$ , so ist der Wess-Zumino-Term

$$S_{\text{WZ}}[\phi] = k \int_B \tilde{\phi}^* H \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \quad (24)$$

unabhängig von der Wahl von  $B$  und der Fortsetzung  $\tilde{\phi}$ .

**2.2.4 Variation des Wess-Zumino-Terms.** Zur Variation des Wess-Zumino-Terms verfolgen wir den gleichen Plan wie bei der Variation des kinetischen Terms. Wir müssen lediglich beachten, dass wir nun eine auf  $B$  definierte Abbildung  $\tilde{\phi} : B \rightarrow G$  variieren. Es sei also  $\delta\tilde{\phi}$  ein Variationsvektorfeld zu  $\tilde{\phi} : B \rightarrow G$ , das heißt ein Schnitt im Bündel  $\iota^{-1}TG$ , wobei nun  $\iota : \tilde{\phi}(B) \hookrightarrow G$  ist. Dazu sei  $\tilde{\Phi}$  sein lokaler Fluss und  $\tilde{\phi}_t = \tilde{\Phi}_t \circ \tilde{\phi}$  die Variation von  $\tilde{\phi}$  bezüglich  $\delta\tilde{\phi}$ . Nach Anwendung von Lemma 2.1C folgt unmittelbar

$$\delta S_{\text{WZ}}[\phi] = k \int_B \tilde{\phi}^* \text{Lie}_{\delta\tilde{\phi}} H.$$

Im Integranden verwenden wir die Cartansche Homotopieformel (15), und dass  $H$  geschlossen ist, und erhalten  $\text{Lie}_{\delta\tilde{\phi}}H = d(\delta\tilde{\phi} \lrcorner H)$ . Mit der Definition (23) von  $H$  wird das innere Produkt ausgewertet zu

$$\delta\tilde{\phi} \lrcorner H = \delta\tilde{\phi} \lrcorner \frac{1}{6}\eta(\theta, \theta, \theta) = \frac{1}{2}\eta(\delta\tilde{\phi} \lrcorner \theta, \theta, \theta).$$

Die Definition (22) von  $\eta$  bringt dann zusammen mit der Strukturgleichung (8)

$$\delta\tilde{\phi} \lrcorner H = - \left\langle \delta\tilde{\phi} \lrcorner \theta, d\theta \right\rangle.$$

Wir setzen jetzt alles ein und erhalten

$$\delta S_{\text{WZ}}[\phi] = k \int_B \tilde{\phi}^* d(\delta\tilde{\phi} \lrcorner H) = -k \int_B d\tilde{\phi}^* \left\langle \delta\tilde{\phi} \lrcorner \theta, d\theta \right\rangle.$$

Mit dem Stokesschen Satz bekommen wir ein Integral über  $\partial B = \Sigma$ , und gemäß  $\tilde{\phi}|_{\Sigma} = \phi$  und mit dem Vektorfeld  $\delta\phi := \delta\tilde{\phi}|_{\Sigma}$  erhalten wir die Variation

$$\delta S_{\text{WZ}}[\phi] = -k \int_{\Sigma} \left\langle \phi^* (\delta\phi \lrcorner \theta), \phi^* d\theta \right\rangle \quad (25)$$

die erwartungsgemäß nicht mehr von den Wahlen von  $B$  oder  $\tilde{\phi}$  abhängt.

**2.3 Erhaltungsgrößen im Wess-Zumino-Witten-Modell.** Wir kombinieren nun die in den beiden letzten Abschnitten untersuchten Wirkungen zu der des Wess-Zumino-Witten-Modells

$$S[\phi] = S_{\text{kin}}[\phi] + S_{\text{WZ}}[\phi]. \quad (26)$$

Dabei haben wir in beiden Summanden dieselbe Konstante  $k$  und dieselbe Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gewählt, was sich als wesentlich für die Gestalt der Bewegungsgleichungen erweisen wird. Wir fixieren im folgenden eine Wahl von  $B$  und  $\tilde{\phi}$  im Wess-Zumino-Term, und berufen uns auf die im letzten Abschnitt erläuterte Unabhängigkeit von diesen Wahlen.

Wir werden die Wirkung (26) zunächst auf Symmetrien untersuchen, und dann die Bewegungsgleichungen berechnen. Schließlich werden wir eine neue Interpretation der gefundenen Gleichungen geben, die der Ausgangspunkt unserer Behandlung nichtorientierbarer Weltflächen in Abschnitt 4 sein wird.

**2.3.1 Symmetrien der Wess-Zumino-Witten-Wirkung.** Neben der schon erwähnten konformen Symmetrie stellen wir eine diskrete Symmetrie fest, die Witten gefunden und Paritätssymmetrie genannt hat [Wi], sowie eine kontinuierliche Symmetrie, deren zugehörige erhaltene Größe wir durch die Variation im anschließenden Abschnitt bekommen werden.

Zur Überprüfung der konformen Invarianz betrachten wir eine konforme Transformation auf  $\Sigma$ , das heißt einen Diffeomorphismus  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  mit

$$f^*h = e^{2\sigma}h,$$

wobei  $\sigma \in C^\infty(\Sigma)$  ist. In der Wirkung  $S[\phi]$  geht die Metrik nur im kinetischen Term ein, und zwar im Hodgeschen Sternoperator  $\star$ . Für eine Einsform  $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$  auf einer Karte  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist

$$(\star\omega)_j := \sqrt{|h|} \varepsilon_{ij} h^{ik} \omega_k.$$

Unter der Transformation  $h \mapsto e^{2\sigma}h$  haben wir  $\sqrt{|h|} \mapsto e^{2\sigma}\sqrt{|h|}$  sowie  $h^{ik} = (h_{ik})^{-1} \mapsto (e^{2\sigma}h_{ik})^{-1} = e^{-2\sigma}h^{ik}$ . Also bleibt  $\star\omega$  invariant unter konformen Transformationen, gleiches gilt auch für die in der Lagrangedichte auftretende Form  $\star\theta$ , die Lagrangedichte bleibt daher invariant unter konformen Transformationen. Zur konformen Invarianz des Wess-Zumino-Terms können wir nur feststellen, dass er in keiner Weise von der Metrik  $h$  der Weltfläche abhängt, aus welchem Grund er auch häufig als topologischer Term bezeichnet wird. Er ist also manifest invariant unter konformen Transformationen; das Wess-Zumino-Witten-Modell hat damit konforme Symmetrie.

Wir untersuchen weiter die Auswirkung eines Orientierungswechsels auf der Weltfläche  $\Sigma$ . Er bewirkt

$$\int_\Sigma \mapsto - \int_\Sigma, \quad \text{vol} \mapsto - \text{vol} \quad \text{und damit} \quad \star \mapsto - \star.$$

Mit der Bilinearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist  $S_{\text{kin}}[\phi]$  also invariant. Im Wess-Zumino-Term ändert sich die Orientierung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $B$ , so dass das Integral über  $B$ , und damit der ganze Term, sein Vorzeichen wechselt. Der Orientierungswechsel auf  $\Sigma$  ist also keine Symmetrie des Wess-Zumino-Witten-Modells. Witten aber hat eine weitere Transformation gefunden, deren Verkettung mit dem Orientierungswechsel auf  $\Sigma$  zu einer Symmetrie wird. Diese Transformation ist der Übergang  $\phi \mapsto \phi^{-1} = \text{Inv} \circ \phi$ . Wir berechnen zunächst mit (9)

$$\phi^*\theta \mapsto (\text{Inv} \circ \phi)^*\theta = \phi^* \text{Inv}^*\theta = -\phi^*\bar{\theta}.$$

Die Lagrangedichte des kinetischen Terms wird damit zu

$$\mathcal{L}[\text{Inv} \circ \phi] = \langle \phi^*\bar{\theta}, \star\phi^*\bar{\theta} \rangle.$$

Das ist aber zusammen mit (11) und der Ad-Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  genau gleich  $\mathcal{L}[\phi]$ , die Lagrangedichte und damit der kinetische Term sind also invariant unter dieser Transformation.

Für den Wess-Zumino-Term  $S_{\text{WZ}}[\phi] = S_{\text{WZ}}[\tilde{\phi}, B]$  müssen wir für die Abbildung  $\text{Inv} \circ \phi$  neue Wahlen treffen, es bieten sich dabei  $B$  und  $\text{Inv} \circ \tilde{\phi}$  an, die die erforderlichen Bedingungen erfüllen. Dann müssen wir

$$S_{\text{WZ}}[\text{Inv} \circ \tilde{\phi}, B] = k \int_B \tilde{\phi}^* (\text{Inv}^* H)$$

berechnen. Wir verwenden die Definition (23)

$$H = \frac{1}{6} \eta(\theta, \theta, \theta) = \frac{1}{6} \eta(\bar{\theta}, \bar{\theta}, \bar{\theta}),$$

die zusammen mit (9) und der Trilinearität von  $\eta$  sofort

$$\text{Inv}^* H = \frac{1}{6} \eta (\text{Inv}^* \theta, \text{Inv}^* \theta, \text{Inv}^* \theta) = \frac{1}{6} \eta (-\bar{\theta}, -\bar{\theta}, -\bar{\theta}) = -H$$

ergibt. Der Wess-Zumino-Term wechselt also unter der Transformation  $\phi \mapsto \phi^{-1}$  sein Vorzeichen.

Während also der kinetische Term sowohl unter dem Orientierungswechsel auf  $\Sigma$  als auch unter  $\phi \mapsto \text{Inv} \circ \phi$  invariant ist, ist der Wess-Zumino-Term nur invariant unter beiden simultanen Transformationen, was Witten als Paritätssymmetrie bezeichnet hat. Insbesondere hat die Wess-Zumino-Witten-Wirkung (26) Paritätssymmetrie.

Wir wollen nun aus zwei Abbildungen  $\phi_1, \phi_2 : \Sigma \rightarrow G$  durch punktweise Multiplikation in der Gruppe  $G$  eine neue Abbildung  $\phi_1 \phi_2 : \Sigma \rightarrow G$  konstruieren. Es bezeichne  $\mu : G \times G \rightarrow G$  die Gruppenmultiplikation und  $\Delta_\Sigma$  die Diagonalabbildung von  $\Sigma$ , dann haben wir formal

$$\phi_1 \phi_2 = \mu \circ (\phi_1, \phi_2) \circ \Delta_\Sigma. \quad (27)$$

Wir wollen nun die Wirkung  $S[\phi_1 \phi_2]$  untersuchen, und werden den folgenden Satz als Ergebnis erhalten.

**SATZ 2.3A (Polyakov, Wiegmann).** *Für die durch punktweise Multiplikation zusammengesetzte Abbildung  $\phi_1 \phi_2 : \Sigma \rightarrow G$  gilt*

$$S[\phi_1 \phi_2] = S[\phi_1] + S[\phi_2] + k \int_\Sigma \langle \phi_1^* \theta, (1 - \star) \phi_2^* \bar{\theta} \rangle. \quad (28)$$

*Beweis.* Im kinetischen Term  $S[\phi_1 \phi_2]$  tritt der Ausdruck  $(\phi_1 \phi_2)^* \theta$  auf, den wir zuerst berechnen. Dazu haben wir das Differential der Multiplikationsabbildung

$$d\mu|_{(a,b)}(v, w) = dr_b|_a(v) + dl_a|_b(w)$$

für  $a, b \in G$  und  $v \in T_a G$ ,  $w \in T_b G$ . Damit bekommt man für die zurückgezogenen Maurer-Cartan-Formen  $\mu^* \theta|_{(a,b)}(v, w) = (\text{Ad}_b^{-1} \circ \theta_a)(v) + \theta_b(w)$ . Zusammen mit (27) ist damit lokal

$$(\phi_1 \phi_2)^* \theta|_s = \text{Ad}_{\phi_2(s)}^{-1} \circ \phi_1^* \theta|_s + \phi_2^* \theta|_s.$$

Über die Linearität und Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , sowie Lemma 2.1B (ii) bekommen wir nach Einsetzen

$$\langle (\phi_1 \phi_2)^* \theta, \star (\phi_1 \phi_2)^* \theta \rangle = \langle \phi_1^* \theta, \star \phi_1^* \theta \rangle + \langle \phi_2^* \theta, \star \phi_2^* \theta \rangle + 2 \langle \phi_1^* \theta, \star \phi_2^* \bar{\theta} \rangle.$$

Für den kinetischen Term gilt also

$$S_{\text{kin}}[\phi_1 \phi_2] = S_{\text{kin}}[\phi_1] + S_{\text{kin}}[\phi_2] - k \int_\Sigma \langle \phi_1^* \theta, \star \phi_2^* \bar{\theta} \rangle.$$

Für den Wess-Zumino-Term müssen wir  $(\tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2)^* H$  angeben. Mit (23) und (22), wieder mit der Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , und Lemma 2.1 B bekommen wir nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2)^* H &= \frac{1}{6} \langle \phi_1^* \theta + \phi_2^* \bar{\theta}, [\phi_1^* \theta + \phi_2^* \bar{\theta}, \phi_1^* \theta + \phi_2^* \bar{\theta}] \rangle \\ &= \phi_1^* H + \phi_2^* H + \mathbf{d} \langle \phi_1^* \theta, \phi_2^* \bar{\theta} \rangle. \end{aligned}$$

Für den Wess-Zumino-Term gilt damit

$$S_{\text{WZ}}[\phi_1 \phi_2] = S_{\text{WZ}}[\phi_1] + S_{\text{WZ}}[\phi_2] + k \int_{\Sigma} \langle \phi_1^* \theta, \phi_2^* \bar{\theta} \rangle,$$

damit folgt der Satz.  $\square$

Wir wollen diesen Satz nun benutzen, um weitere Symmetrien zu finden. Der dort auftretende Operator

$$1 - \star : \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

ist invertierbar mit Inversem  $\frac{1}{2}(1 + \star)$ , da auf Einsformen  $\star \star = -1$  ist. Wenn wir fordern, dass der gemischte Term in (28) verschwindet, fordern wir  $(1 - \star) \phi_2^* \theta = 0$ , was also äquivalent ist zur Forderung  $\phi_2^* \theta = 0$ . Diese Gleichung wird nur durch konstante Abbildungen  $\phi_2$  gelöst. Da in diesem Fall auch  $S[\phi_2]$  konstant ist, und nicht zur Variation beiträgt, ist  $\phi \mapsto r_g \circ \phi$  mit der Rechtsmultiplikation  $r_g$  eine Symmetrie des Wess-Zumino-Witten-Modells. Da wir mit Lemma 2.1 B im Satz auch

$$\langle \phi_1^* \theta, (1 - \star) \phi_2^* \bar{\theta} \rangle = \langle (1 + \star) \phi_1^* \theta, \phi_2^* \bar{\theta} \rangle$$

schreiben können, haben wir mit derselben Begründung eine Symmetrie  $\phi \mapsto l_{\bar{g}} \circ \phi$  mit der Linksmultiplikation  $l_{\bar{g}}$ . Diese beiden Symmetrien bezeichnen wir als Links- und Rechtstranslationssymmetrie.

Wir können auch die Paritäts- und die Translationssymmetrie verbinden, und die Orientierungsumkehr auf  $\Sigma$  gleichzeitig mit der durch  $\gamma = r_g \circ l_{\bar{g}} \circ \text{Inv}$  erzeugten Transformation  $\phi \mapsto \gamma \circ \phi$  anwenden. Besonders interessant werden für uns dabei die Fälle sein, in denen  $\gamma$  eine längenerhaltende Involution ist, das heißt  $\gamma^2 = 1$ . Gemäß einer Diskussion in [Bru][HuiSchSch] legt das die zu betrachtenden Abbildungen auf

$$\gamma = l_z \circ \text{Inv}$$

fest, wobei  $z \in Z(G)$  ein Element des Zentrums der Gruppe ist.

**2.3.2 Bewegungsgleichungen.** Die Bewegungsgleichungen des Wess-Zumino-Witten-Modells folgen aus der Variation der Wirkung (26), diese ist also gerade die Summe der Variationen (16) des kinetischen Terms und des Wess-Zumino-Terms (25), nämlich

$$\delta S[\phi] = k \int_{\Sigma} \langle \phi^* (\delta \phi) \theta \rangle, -\mathbf{d} (1 + \star) \phi^* \theta \rangle.$$

Nachdem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht-ausartet ist und das Variationsvektorfeld  $\delta\phi$  beliebige Werte annimmt, folgern wir die Bewegungsgleichung

$$-d(1 + \star)\phi^*\theta = 0. \quad (29)$$

Nachdem die Wirkung (26) invariant unter Paritäts- und Translationssymmetrie war, also invariant unter einem Orientierungswechsel auf  $\Sigma$ , gekoppelt mit der Transformation  $\phi \rightarrow \gamma \circ \phi$ , sollte diese Symmetrie auch Bewegungsgleichungen in Bewegungsgleichungen überführen. Diese transformiert sich zur Gleichung

$$d(1 - \star)\phi^*\bar{\theta} = 0. \quad (30)$$

Üblicherweise spricht man hier von zwei äquivalenten Gleichungen, oder von den zwei erhaltenen Strömen

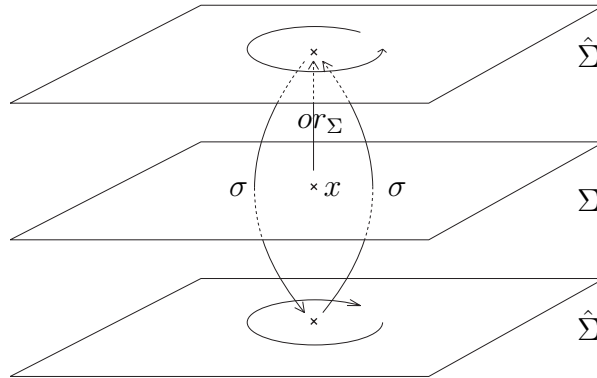
$$J := -(1 + \star)\phi^*\theta \quad \text{und} \quad \bar{J} := (1 - \star)\phi^*\bar{\theta}.$$

Ein Vergleich mit den Überlegungen nach Satz 2.3A zeigt, dass diese Ströme die zu Rechts- und Linkstranslationssymmetrie gehörenden, erhaltenen Größen sind.

*2.3.3 Das Wess-Zumino-Witten-Modell als Theorie auf dem doppelten Überlagerungsraum.* Anstatt von zwei Strömen oder zwei äquivalenten Bewegungsgleichungen zu sprechen, versuchen wir hier eine neue Interpretation, indem wir zum doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  der Weltfläche  $\Sigma$  übergehen. Wir werden im Abschnitt 4.1.1 eine präzise Definition dieses Raumes geben, und an dieser Stelle nur auf den hier vorliegenden Spezialfall einer orientierbaren Weltfläche  $\Sigma$  eingehen. Dann besteht  $\hat{\Sigma}$  aus zwei disjunkten Kopien von  $\Sigma$ , die entgegengesetzt orientiert sind, und die wir die beiden Blätter von  $\hat{\Sigma}$  nennen. Die Wahl einer Orientierung auf  $\Sigma$  entspricht einer Auszeichnung einer der beiden Blätter, und wir werden eine solche Auszeichnung als stetige Abbildung  $\text{or}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \hat{\Sigma}$  verstehen, die jedem Punkt  $x \in \Sigma$  denselben Punkt  $x$  in dem auszuzeichnenden Blatt zuordnet. Daraus, dass  $\text{or}_\Sigma$  stetig ist, und  $\hat{\Sigma}$  in zwei disjunkte Teile zerfällt, folgt, dass das Bild  $\text{or}_\Sigma(\Sigma)$  genau eines der beiden Blätter ist; dieses ist damit ausgezeichnet.

Eine Abbildung  $\sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$  definieren wir dadurch, dass einem Punkt  $x \in \Sigma$  des einen Blattes derselbe Punkt in dem anderen Blatt zugeordnet wird. Es gilt  $\sigma^2 = 1$ , das heißt,  $\sigma$  ist eine orientierungsumkehrende Involution im doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$ . Wenn wir eine Orientierung  $\text{or}_\Sigma$  gewählt haben, ist  $\sigma \circ \text{or}_\Sigma$  die entgegengesetzte Orientierung.





Wir haben die Diskussion des Wess-Zumino-Witten-Modells mit einer fixierten Orientierung auf  $\Sigma$  begonnen, haben also eine Theorie von Abbildungen  $\phi : \text{or}_{\Sigma}(\Sigma) \rightarrow G$  auf einem der beiden Blätter von  $\Sigma$  in  $\hat{\Sigma}$  aufgestellt. Dann haben wir das Verhalten dieser Theorie unter einer Wechsel der Orientierung auf  $\Sigma$  untersucht. In unserer Interpretation entspricht das einer Transformation  $\phi \mapsto \phi \circ \sigma$ , wir gehen also zu einer Theorie von Abbildungen  $\phi \circ \sigma : \sigma(\text{or}_{\Sigma}(\Sigma)) \rightarrow G$  auf dem anderen Blatt des doppelten Überlagerungsraumes über.

Es hat sich allerdings herausgestellt, dass das Wess-Zumino-Witten-Modell nicht invariant unter dieser Transformation ist. Nur in Verbindung mit einer Transformation  $\phi \mapsto \gamma \circ \phi$  im Zielraum  $G$  ergibt sich auf dem anderen Blatt dieselbe Theorie mit derselben Wirkung. Dies führt uns zu einer Abbildung

$$\widetilde{\text{or}}_{\Sigma} : \text{Map}(\text{or}_{\Sigma}(\Sigma), G) \rightarrow \text{Map}(\hat{\Sigma}, G),$$

deren Definition wir nach den voranstehenden Überlegungen wie folgt entnehmen. Zu einer Abbildung  $\phi \in \text{Map}(\text{or}_{\Sigma}(\Sigma), G)$  definieren wir das Bild  $\hat{\phi} = \widetilde{\text{or}}_{\Sigma}(\phi) \in \text{Map}(\hat{\Sigma}, G)$  dieser Abbildung auf den beiden Blättern separat, und zwar

$$\hat{\phi}|_{\text{or}_{\Sigma}(\Sigma)} := \phi \quad \text{und} \quad \hat{\phi}|_{\sigma(\text{or}_{\Sigma}(\Sigma))} := \gamma \circ \phi \circ \sigma.$$

Wir legen uns nun auf Transformationen  $\gamma = l_z \circ \text{Inv}$  im Zielraum fest, und erreichen damit, dass die Abbildungen im Bild von  $\widetilde{\text{or}}_{\Sigma}$  invariant unter der Paritätssymmetrie

$$\hat{\phi} \mapsto \gamma \circ \hat{\phi} \circ \sigma$$

sind, nachdem sowohl  $\sigma$  als auch  $\gamma$  Involutionen sind. Die Menge dieser Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\text{Map}(\hat{\Sigma}, G)^{\sigma, \gamma} := \left\{ \hat{\phi} : \hat{\Sigma} \rightarrow G \mid \hat{\phi} = \gamma \circ \hat{\phi} \circ \sigma \right\}.$$

Außerdem wird die soeben definierte Abbildung  $\widetilde{\text{or}}_{\Sigma}$  in ihrem Bildbereich  $\text{Map}(\hat{\Sigma}, G)^{\sigma, \gamma}$  invertierbar. Ihr Inverses ordnet einer Abbildung  $\hat{\phi} \in \text{Map}(\hat{\Sigma}, G)$  die Einschränkung auf das Blatt  $\text{or}_{\Sigma}(\Sigma)$  zu.

Unsere Interpretation lautet nun wie folgt. Das Wess-Zumino-Witten-Modell ist eine Theorie von Abbildungen  $\hat{\phi} \in \text{Map}(\hat{\Sigma}, G)^{\sigma, \gamma}$  des doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$  der hier zwar orientierbaren, aber nicht orientierten Weltfläche  $\Sigma$  in den Zielraum  $G$ ; dabei ist  $\gamma$  eine längenerhaltende Involution von  $G$ . Die Bewegungsgleichung lautet

$$-d(1 + \star)\hat{\phi}^*\theta = 0 \quad \iff \quad d(1 - \star)\hat{\phi}^*\bar{\theta} = 0,$$

beide Gleichungen sind aufgrund der Invarianz von  $\hat{\phi}$  nun tatsächlich algebraisch äquivalent. Wählt man eine Orientierung  $\widetilde{\text{or}}_{\Sigma}$  auf  $\Sigma$ , so legt man sich auf eines der beiden Blätter fest, und reproduziert dort das Wess-Zumino-Witten-Modell mit fixierter Orientierung, mit dessen Diskussion wir in Abschnitt 2.1.3 begonnen hatten. Diese Interpretation ist der Ausgangspunkt unserer Behandlung des Wess-Zumino-Witten-Modells auf nichtorientierbaren Weltflächen in Abschnitt 4.

### 3 Gerben

Hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang sind ein mathematisches Werkzeug zur Beschreibung der Kopplung von Punktteilchen an ein elektromagnetisches Feld. Während hermitesche Geradenbündel (ohne Zusammenhang) durch die Kohomologiegruppe  $H^2(M, \mathbb{Z})$  klassifiziert werden, verwenden wir zur Klassifizierung von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang eine Hyperkohomologietheorie, und zwar die Deligne-Hyperkohomologiegruppe  $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}(1)_D^\bullet)$ .

Gehen wir von Punktteilchen zu eindimensionalen Strings über, so sollen Gerben, genauer gesagt hermitesche Bündelgerben mit Zusammenhang und Krümmung, die Rolle der hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang übernehmen, und die Kopplung eines Strings an ein Hintergrundfeld beschreiben. Die Analogie von Geradenbündeln und Gerben setzt sich in der klassifizierenden Theorie fort, und zwar in einer um Eins erhöhten Dimension. Gerben werden demnach durch die Kohomologiegruppe  $H^3(M, \mathbb{Z})$  klassifiziert, und Gerben mit Zusammenhang und Krümmung durch die Deligne-Hyperkohomologiegruppe  $\check{H}^2(M, \mathbb{Z}(2)_D^\bullet)$ .

Daher werden wir in Abschnitt 3.1 die Deligne-Hyperkohomologietheorie einführen. In Abschnitt 3.2 werden wir im Detail hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang besprechen und klassifizieren. Dann werden wir im Abschnitt 3.3 zur Definition von Gerben, Zusammenhängen auf Gerben und Krümmungen kommen, und diese ebenfalls klassifizieren. Letztendlich werden wir mithilfe von Gerben und ihrer Holonomie in Abschnitt 3.4 den Wess-Zumino-Term neu definieren, und damit die Gültigkeit des Wess-Zumino-Witten-Modells um einige Einschränkungen erleichtern.

**3.1 Deligne-Hyperkohomologietheorie.** Pierre Deligne hat diese Theorie um 1972 eingeführt, um eine Kohomologietheorie für bestimmte algebraische Varietäten zu bekommen. 1991 stellte er fest, dass seine Theorie hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang klassifizierte, und Jean-Luc Brylinski entdeckte 1993, dass sie ebenfalls zur Klassifikation von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung verwendet werden kann.

Entsprechend der Entstehungsgeschichte der Deligne-Hyperkohomologie wird dieser Abschnitt vorerst nichts mit geometrischen Objekten oder gar Physik zu tun haben. Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenfassung der Čech-Kohomologietheorie, auf die alles weitere aufbauen wird. Für Details müssen wir zum Beispiel auf die Bücher von R. Bott und L.W. Tu [BoTu], J.-L. Brylinski [Bry] oder F.W. Warner [Wa] verweisen.

3.1.1 *Čech-Kohomologietheorie und der Čech-de Rham-Doppelkomplex.* Wir arbeiten auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  (ohne Rand) und betrachten (Prä-)Garben abelscher Gruppen über  $M$ . Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  ordnet jeder offenen Untermenge  $U$  von  $M$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zu, und jeder Inklusion  $\iota_U^V : V \hookrightarrow U$  verschachtelter Untermengen einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{F}(\iota_U^V) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V),$$

so dass der Identität  $\iota_U^U$  die Identität  $\mathcal{F}(\iota_U^U) = \text{id}$  zugeordnet wird, und für eine dreifache Verschachtelung  $W \hookrightarrow V \hookrightarrow U$  die Transitivitätsbedingung

$$\mathcal{F}(\iota_U^W) = \mathcal{F}(\iota_V^W) \circ \mathcal{F}(\iota_U^V)$$

gilt. In der kategoriellen Sprache ist eine Prägarbe also ein kontravarianter Funktor von der Kategorie  $\text{Open}(M)$  der offenen Untermengen von  $M$  in die der abelschen Gruppen. Betrachten wir zwei Untermengen  $U$  und  $V$  mit zwei Gruppenelementen  $u \in \mathcal{F}(U)$  und  $v \in \mathcal{F}(V)$ , und nehmen an, dass die Schnittmenge  $U \cap V$  nicht leer ist. Eine Garbe  $\mathcal{F}$  hat gegenüber einer Prägarbe die zusätzliche Eigenschaft, dass aus einer Übereinstimmung

$$\mathcal{F}(\iota_{U \cap V}^U)(u) = \mathcal{F}(\iota_{U \cap V}^V)(v)$$

auf dem Schnitt  $U \cap V$  die Existenz eines eindeutigen Gruppenelementes  $w \in \mathcal{F}(U \cup V)$  folgt, so dass

$$\mathcal{F}(\iota_U^{U \cup V})(w) = u \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(\iota_V^{U \cup V})(w) = v$$

sind.

Wir werden hier nur mit zwei speziellen Arten von Garben abelscher Gruppen zu tun haben. Für eine abelsche Gruppe  $A$  haben wir zum einen die (genauso bezeichnete) Garbe  $A$ , die jeder offenen Untermenge  $U$  die abelsche Gruppe  $A(U)$  der lokal konstanten, stetigen Abbildungen  $U \rightarrow A$  zuordnet (für ein zusammenhängendes  $U$  sind das genau die konstanten Abbildungen). Ist  $A$  zusätzlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, zum Beispiel  $A = \mathbb{R}, U(1)$ , so haben wir außerdem die Garbe  $\underline{A}$ , die der Untermenge  $U$  die abelsche Gruppe  $\underline{A}(U)$  der glatten Abbildungen  $U \rightarrow A$  zuordnet. Für beide Garben  $\mathcal{F} = A, \underline{A}$  sind die Gruppenhomomorphismen  $\mathcal{F}(\iota_U^V) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  lediglich die Einschränkungen von Abbildungen auf  $U$  auf die kleinere Menge  $V$ . Die Aussage, dass  $A$  und  $\underline{A}$  Garben sind, bedeutet, dass es, wenn zwei stetige (differenzierbare) Abbildungen auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, eine eindeutige Abbildung auf der Vereinigung ihrer Definitionsbereiche gibt, so dass sich die beiden Abbildungen als Einschränkungen dieser einen Abbildung ergeben.

Wir fixieren eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  von  $M$ , und definieren für eine Garbe  $\mathcal{F}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  die Čech-Kokettengruppe bezüglich  $\mathcal{U}$  mit Werten in  $\mathcal{F}$  als das direkte Produkt

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0, \dots, i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}).$$

Wir betrachten die Inklusion  $\partial_j$  eines Schnittes von  $(k + 1)$  Teilmengen in  $k$ -Teilmengen durch Weglassen der  $j$ -ten Menge, und den daraus durch die Garbe bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\mathcal{F}(\partial_j) : \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{j-1}} \cap U_{i_{j+1}} \cap \dots \cap U_{i_k}) \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}).$$

Auf den Čech-Kokettengruppen definieren wir durch eine Linearkombination dieser Gruppenhomomorphismen den Čech-Korandoperator

$$\delta^k = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \mathcal{F}(\partial_j) : \check{C}^k(\mathfrak{U}, A) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, A).$$

Den Index am Korandoperator werden wir häufig weglassen. Er ist ein Gruppenhomomorphismus, und erfüllt wegen des alternierenden Vorzeichens in seiner Definition die Komplexbedingung  $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 1$ . Gruppenelemente im Kern von  $\delta$  heißen Kozykel. Damit haben wir den Čech-Komplex

$$\dots \xrightarrow{\delta} \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \check{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

bezüglich  $\mathfrak{U}$  mit Werten in  $\mathcal{F}$  definiert. Seine Kohomologiegruppen

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker \delta^k / \operatorname{im} \delta^{k-1}$$

heißen die Čech-Kohomologiegruppen bezüglich  $\mathfrak{U}$  mit Werten in  $\mathcal{F}$ .

Um die Abhängigkeit von der Wahl der offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  zu eliminieren, betrachtet man die Menge aller offener Überdeckungen von  $M$  und nutzt aus, dass diese bezüglich Verfeinerung eine induktiv geordnete Menge bilden. Dabei heißt eine Überdeckung  $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$  feiner als eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ , wenn es eine Abbildung der Indextmengen  $f : J \longrightarrow I$  gibt mit  $V_j \subseteq U_{f(j)}$ . Eine solche Abbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus der Kokettengruppen

$$f^* : \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^k(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

Für eine andere Wahl  $f'$  erhält man eine zu  $f^*$  homotope Abbildungen  $f'^*$ , außerdem sind beide Kettenabbildungen ([BoTu], Lemmata 10.4.1. und 10.4.2), was bedeutet, dass es einen von der Wahl von  $f$  unabhängigen Gruppenhomomorphismus

$$\varrho_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

gibt. Die Čech-Kohomologiegruppen bilden über diese Abbildungen ein sogenanntes direktes System, und erlauben es, über den direkten Limes der Čech-Kohomologiegruppen zu von Überdeckungen unabhängigen Čech-Kohomologiegruppen überzugehen,

$$\check{H}^k(M, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}). \quad (31)$$

Damit meint man die disjunkte Vereinigung der Čech-Kohomologiegruppen zu allen Überdeckungen, geteilt durch eine Äquivalenzrelation, die zwei Elemente  $g$  und  $h$  aus Kohomologiegruppen zu zwei Überdeckungen  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{V}$  identifiziert, wenn in einer gemeinsamen Verfeinerung  $\mathfrak{W}$  von  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{V}$  die Gleichheit  $\varrho_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}(g) = \varrho_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}}(h)$  gilt.

Die Čech-Kohomologiegruppen  $\check{H}^k(M, \mathcal{F})$  haben wieder funktorielle Eigenschaften. Dazu betrachten wir zwei Garben  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  und einen Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  von Garben, damit meint man einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  für jede offene Untermenge  $U \subseteq M$ , der mit den Abbildungen  $\mathcal{F}(\iota_U^V)$  verträglich ist. Dann gibt es einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\varphi^* : \check{H}^k(M, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(M, \mathcal{G}).$$

Wir kommen nun unseren beiden Garben  $A$  und  $\underline{A}$  zurück. Beispielsweise geben wir kurz ein Element der Čech-Kokettengruppe  $g \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, A)$  an, ein solches ist eine lokal konstante Abbildung

$$g_{i_0, \dots, i_k} : U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \rightarrow A.$$

Der Čech-Korandoperator wirkt wie

$$(\delta g)_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j g_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{k+1}} \in \check{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, A).$$

Man kann nun zeigen, dass die Čech-Kohomologiegruppen mit Werten in  $A$  die Axiome einer Kohomologietheorie mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe  $A$  erfüllen. Daher stehen sie in kanonischer Isomorphie zu den schon angesprochenen (singulären) Kohomologiegruppen,  $\check{H}^k(M, A) = H^k(M, A)$ . Man sollte hierbei betonen, dass diese Isomorphie für die Čech-Kohomologiegruppen mit Werten in  $\underline{A}$  nicht gilt.

Wir wollen jetzt nicht mehr nur eine Garbe betrachten, sondern gleich ganze Sequenzen von Garben. Wir besprechen zwei Spezialfälle, nämlich zuerst eine kurze exakte Sequenz, die zu einer langen exakten Sequenz von Kohomologiegruppen führt, und dann einen Komplex von Garben, aus dem wir einen Doppelkomplex erhalten.

Ein wichtiges Beispiel einer kurzen exakten Sequenz von Garben ist die (reelle) Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{R} \xrightarrow{e^i} \underline{U}(1) \longrightarrow 0. \quad (32)$$

In dieser Sequenz steht die Garbe  $\mathbb{Z}$  der lokal konstanten Funktionen mit Werten in  $\mathbb{Z}$ , und die beiden Garben  $\mathbb{R}$  und  $\underline{U}(1)$  von glatten (nicht unbedingt lokal konstanten) Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$  bzw.  $U(1)$ . Die Inklusion  $\iota$  betrachten wir hier als Morphismus von Garben, und hat wieder die besondere Normierung  $z \mapsto 2\pi z$ . Zu jeder der drei Garben können wir nun die Čech-Kokettengruppen bezüglich einer offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  nehmen und erhalten so eine immer noch exakte Sequenz von Čech-Kokettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{e^i} \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{U}(1)) \longrightarrow 0.$$

Čech-Kohomologie mit Werten in einer beliebigen abelschen Gruppe hat die Eigenschaft, dass eine kurze exakte Sequenz von Čech-Kokettenkomplexen eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen impliziert, nämlich

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^k(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \check{H}^k(M, \underline{U}(1)) & & \\ & & & & \omega & \curvearrowright & \\ & & & & & & \\ & \curvearrowleft & & & & & \\ & & H^{k+1}(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^{k+1}(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dabei haben wir die Čech-Kohomologiegruppen mit Werten in  $\mathbb{Z}$  schon mit den (singulären) Kohomologiegruppen identifiziert. Die Garbe  $\mathbb{R}$  hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Čech-Kohomologiegruppen  $\check{H}^k(M, \mathbb{R})$  für  $k > 0$  auf parakompakten Räumen, so wie es in unserem Fall einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit vorliegt, verschwinden (Theoreme 1.4.6 und 1.4.15. in [Bry]). Die lange Sequenz wird also in kleine Stücke geteilt, so dass jeder Verbindungshomomorphismus

$$\omega : \check{H}^k(M, \underline{U}(1)) \longrightarrow H^{k+1}(M, \mathbb{Z}), \quad (33)$$

für  $k > 0$  sogar ein Isomorphismus ist.

Da wir diesen Verbindungshomomorphismus noch häufig benutzen werden, wollen wir ihn explizit angeben. Es werde also ein Element in  $\check{H}^k(M, \underline{U}(1))$  vertreten durch einen Čech-Kozykel  $g \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ . Die Surjektivität der Exponentialabbildung in (32) gibt uns ein Element  $\log(g) \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  und seinen Rand  $\delta \log(g) \in \check{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ . Da die Exponentialabbildung und  $\delta$  vertauschen, ist  $\exp(i\delta \log(g)) = 0$ . Daher liegt  $\delta \log(g)$  im Bild von  $\iota^*$ , ist also insbesondere lokal konstant,  $\delta \log(g) \in \check{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  und hat das Urbild

$$\frac{1}{2\pi} [\delta \log(g)] \in H^{k+1}(M, \mathbb{Z}).$$

Der zweite Spezialfall, den wir besprechen wollen, ist der eines Komplexes von Garben. Wenn das Differential dieses Komplexes mit dem Čech-Korandoperator  $\delta$  vertauscht, bekommen wir einen Doppelkomplex. Als Beispiel nehmen wir den Komplex

$$\underline{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^1 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

der de Rham-Garben  $\underline{\Omega}^k$ , die einer Untermenge  $U \subseteq M$  die differenzierbaren  $k$ -Formen  $\Omega^k(U)$  auf  $U$  zuordnen. Das ergibt den Čech-de Rham-Doppelkomplex  $\check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^p)$ , in dem eine Kokette  $\omega \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^p)$  eine Familie von lokalen Differentialformen  $\omega_{i_0, \dots, i_k} \in \Omega^p(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$  ist. Der Doppelkomplex besteht aus lauter kommutieren-

den Diagrammen,

$$\begin{array}{ccccc}
 & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \\
 \check{C}^2(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^1) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^2) & \xrightarrow{d} & & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & \\
 \check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^1) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^2) & \xrightarrow{d} & & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & & \\
 \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^1) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^2) & \xrightarrow{d} & & 
 \end{array}$$

Aus einem Doppelkomplex wie  $\check{C}^k(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^p)$  kann man einen normalen Komplex erzeugen, in dem man die Diagonalen mit konstantem  $n = k + p$  direkt summiert. Wir definieren also die Kokettengruppen

$$\text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^\bullet) := \bigoplus_{n=k+p} \check{C}^k(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^p).$$

Die Elemente von  $\text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^\bullet)$  sind von der Form  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  mit  $\alpha_p \in \check{C}^{n-p}(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^p)$ . Außerdem definieren wir ein Differential

$$D_{\text{dR}} : \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^\bullet) \longrightarrow \text{Tot}^{n+1} \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^\bullet),$$

indem wir auf jedem direkten Summanden

$$D_{\text{dR}}|_{\check{C}^k(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^p)} := \delta + (-1)^k d$$

setzen. Das alternierende Vorzeichen ist nötig, um aus der Bedingung  $\delta d = d\delta$  die Komplexeigenschaft  $D_{\text{dR}}^2 = 0$  folgern zu können. Die Kohomologiegruppen des totalen Komplexes nennen wir die Hyperkohomologiegruppen des Doppelkomplexes, und schreiben

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \underline{\Omega}^\bullet) = \ker D_{\text{dR}}^n / \text{im } D_{\text{dR}}^{n-1}.$$

Wir zitieren jetzt einen wichtigen Satz der algebraischen Topologie, von dem wir später noch eine allgemeinere Version verwenden werden.

**SATZ 3.1A** (z.B. Proposition 8.5 in [BoTu]). *Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  und eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  ist die verallgemeinerte Mayer-Vietoris-Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod_{i \in I} \Omega^\bullet(U_i) \xrightarrow{\delta} \prod_{i,j} \Omega^\bullet(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\delta} \dots$$

*exakt, dabei ist  $\delta$  der Čech-Korandoperator und  $r$  die Einschränkung einer global definierten Form  $\omega \in \Omega^\bullet(M)$  auf die einzelnen  $U_i$ .*



In diesen Satz fließt im Wesentlichen die Existenz einer Partition der Eins ein. Im Čech-de Rham-Doppelkomplex stehen in den Spalten genau diese verallgemeinerten Vietoris-Sequenzen, sie sind also exakt. Das bedeutet, dass wir zu jedem Kozykel  $g \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^p)$ , also  $\delta g = 0$ , eine Čech-Kokette  $h \in \check{C}^{k-1}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^p)$  finden mit  $\delta h = g$ .

Anhand des Čech-de Rham-Doppelkomplexes und des letzten Satzes kann man explizit den Gruppenisomorphismus  $\check{H}^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$  konstruieren, den wir durch  $\check{H}^k(M, \mathbb{R}) = H^k(M, \mathbb{R})$  und die Abbildung  $\text{dR}^{-1} : H^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$  im Abschnitt 2.2.2 schon verwendet haben. Dazu bedienen wir uns der Notation eines  $k$ -Zickzacks. Ein  $k$ -Zickzack ist ein Element  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \text{Tot}^{k-1} \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^\bullet)$  im totalen Komplex mit der Zickzackbedingung  $\delta\alpha_i + (-1)^{i-1} \text{d}\alpha_{i-1} = 0$  für alle  $0 < i < k$ . Das bedeutet nicht anderes als

$$\text{D}_{\text{dR}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = (\delta\alpha_0, 0, \dots, 0, \text{d}\alpha_{k-1}).$$

Wir nennen  $\delta\alpha_0 \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^0)$  den Schweif und  $\text{d}\alpha_{k-1} \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^k)$  den Kopf des Zickzacks. Sehen wir uns den Kopf eines Zickzacks auf dem Schnitt zweier Teilmengen  $U_i \cap U_j$  an. Dort ist

$$\text{d}\alpha_{k-1}|_{U_j} - \text{d}\alpha_{k-1}|_{U_i} = \delta(\text{d}\alpha_{k-1}) = \text{d}\delta\alpha_{k-1} = (-1)^k \text{d}\delta\alpha_k = 0,$$

die Garbeneigenschaft von  $\underline{\Omega}^k$  ergibt also, dass der Kopf eines Zickzacks eine eindeutige, global definierte geschlossene  $k$ -Form  $\text{d}\alpha_{k-1} \in \Omega^k(M)$  ist. Für Zickzacke gilt das folgende

LEMMA 3.1B. *Zu jedem Kozykel  $c \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  gibt es einen  $k$ -Zickzack mit Schweif  $c$ .*

$$\begin{array}{c} c \\ \uparrow \delta \\ \alpha_0 \xrightarrow{\text{d}} * \\ \uparrow \delta \\ \alpha_1 \xrightarrow{\text{d}} * \\ \uparrow \delta \\ \alpha_{k-1} \xrightarrow{\text{d}} \text{d}\alpha_{k-1} \end{array}$$

*Beweis durch Diagrammjagd.* Wir fassen den Kozykel  $c$  als Element in  $\check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^0)$  auf. Da nach wie vor  $\delta c = 0$  ist, gibt Satz 3.1A die Existenz eines Elementes  $\alpha_0 \in \check{C}^{k-1}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^0)$  mit  $\delta\alpha_0 = c$ . Wir sehen uns  $\text{d}\alpha_0$  an und berechnen  $\delta(\text{d}\alpha_0) = \text{d}\delta\alpha_0 = \text{d}c = 0$ , da  $c$  lokal konstant ist. Wir wenden wieder den Satz an und erhalten ein Element  $\alpha_1 \in \check{C}^{k-2}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^1)$  mit  $(-1)^k \delta\alpha_1 = \text{d}\alpha_0$ . Es seien nun schon die Elemente  $(\alpha_0, \dots, \alpha_i)$  konstruiert, und erfüllen die Zickzackbedingung. Wir haben  $\delta\text{d}\alpha_i = \text{d}\delta\alpha_i = -\text{d}(-1)^{i-1} \text{d}\alpha_{i-1} = 0$ , und Satz 3.1A gibt uns die Existenz des nächsten Elementes  $\alpha_{i+1} \in \check{C}^{k-i-2}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^{i+1})$  mit  $\delta\alpha_{i+1} = (-1)^{i+1} \text{d}\alpha_i$ . Diese Induktion stoppt zusammen mit der verallgemeinerten Mayer-Vietoris-Sequenz bei  $\alpha_{k-1} \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^{k-1})$ .  $\square$

## Den Isomorphismus

$$dR^{-1} : H^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{dR}^k(M)$$

definieren wir nun wie folgt. Es sei  $c \in \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  ein Vertreter einer Klasse  $[c] \in H^k(M, \mathbb{R})$  bezüglich irgendeiner offenen Überdeckung von  $M$ . Man wählt einen  $k$ -Zickzack mit Schweif  $c$ , nimmt dessen Kopf  $\omega \in \Omega^k(M)$  und setzt  $dR^{-1}([c]) := [\omega]$ . Das ergibt einen Isomorphismus, der unabhängig von den getroffenen Wahlen ist. Für diese Aussagen verweisen wir auf [Bry], Theoreme 1.4.15 und 1.4.17.

Wir haben bisher immer beliebige offene Überdeckungen verwendet. Es hat jedoch viele Vorteile, sich auf sogenannte gute Überdeckungen einzuschränken. Eine gute Überdeckung  $\mathfrak{U}$  ist eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ , so dass alle nichtleeren Schnittmengen von Teilmengen von  $\mathfrak{U}$  zusammenziehbar sind (das betrifft insbesondere die  $U_i$  selbst). Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine gute Überdeckung, und für kompakte Mannigfaltigkeiten kann sogar eine endliche Indexmenge gewählt werden (Theorem 5.1 in [BoTu]).

Die Verwendung guter Überdeckungen im Čech-de Rham-Doppelkomplex hat sowohl topologische als auch differentialtopologische Konsequenzen zur Folge. Topologisch gesehen liegen die guten Überdeckungen kofinal in der induktiv geordneten Menge der Überdeckungen von  $M$ , das bedeutet, dass wir beim Übergang (31) zum direkten Limes nur die guten Überdeckungen berücksichtigen müssen. Für die Garbe  $A$  der lokal konstanten Funktionen nach  $A$  haben wir sogar kanonische Isomorphismen  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, A) \longrightarrow H^n(M, A)$  (Theorem 1.3.6. in [Bry]).

Dann haben wir das Poincaré-Lemma, welches besagt, dass auf einer konvexen Untermenge  $U \subseteq M$  jede geschlossene Differentialform  $\omega \in \Omega^k(U)$  für  $k > 0$  auch exakt ist, das heißt es gibt ein  $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$  mit  $d\eta = \omega$ . Zusammenziehbare Mengen sind insbesondere konvex, und das bedeutet im Čech-de Rham-Doppelkomplex, dass nicht nur die Spalten, sondern auch die Zeilen exakt sind.

Wir werden nun sehen, dass uns die vorangegangene Diskussion des Čech-de Rham-Doppelkomplexes beim Verständnis des Čech-Deligne-Doppelkomplexes behilflich sein wird.

## 3.1.2 Der Čech-Deligne-Doppelkomplex. Wir definieren einen Morphismus

$$dlog : \underline{U}(1) \longrightarrow \underline{\Omega}^1$$

von Garben wie folgt. Es sei  $U$  eine offene Untermenge und  $f : U \longrightarrow U(1)$  eine differenzierbare Abbildung. Die Surjektivität des Garbenmorphismus  $e^i : \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{U}(1)$  in der Exponentialsequenz (32) gibt uns die Existenz einer differenzierbaren Funktion  $\log(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ , die wir als Nullform  $\log(f) \in \Omega^0(U)$  auffassen. Zwei Wahlen  $\log(f)$ ,  $\log(f)'$  eines Logarithmus unterscheiden sich laut (32) um eine lokal konstante Funktion, deren Ableitung verschwindet. Wir können daher die Abbildung  $dlog := d \circ \log$  unabhängig von der Wahl eines Logarithmus definieren. Sie ist verträglich mit Einschränkungen auf kleinere Untermengen, und deshalb ein Morphismus von Garben.

Es sei eine Zahl  $0 < m \in \mathbb{N}$  fixiert. Der Deligne-Garbenkomplex  $\underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet$  entsteht durch zwei Modifikationen am de Rham-Garbenkomplex  $\underline{\Omega}^\bullet$ . Zum einen schneiden wir ihn an der Stelle  $m$  rechts ab, und zum anderen ersetzen wir am Anfang  $\underline{\Omega}^0$  durch  $\underline{U}(1)$  mit der eben definierten Abbildung  $d \log$ . Präziser setzen wir also

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^0 & : = \underline{U}(1), \\ \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^p & : = \underline{\Omega}^p \quad \text{für } 0 \leq m \\ \text{und sonst } \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^p & : = 0. \end{aligned}$$

Die Differentiale sind

$$d^0 = d \log, \quad d^p = d \quad \text{für } 0 < p < m \quad \text{und sonst} \quad d^p = 0.$$

Da  $d \circ d \log = 0$  ist, haben wir so einen Komplex, den Deligne-Garbenkomplex, definiert,

$$\underline{U}(1) \xrightarrow{d \log} \underline{\Omega}^1 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^m. \quad (34)$$

Natürlich bilden wir aus diesem Garbenkomplex den entsprechenden Doppelkomplex bezüglich einer offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $M$ , er heißt Čech-Deligne-Doppelkomplex  $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet)$ . Wenn wir eine gute Überdeckung  $\mathfrak{U}$  wählen, sind - wie schon im Čech-de Rham-Doppelkomplex - seine Zeilen und Spalten exakte Sequenzen. Ebenfalls bilden wir wieder den totalen Komplex

$$\text{Tot } {}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet) = \bigoplus_{n=k+p} \check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^p)$$

und stattdessen ihn mit dem Differential

$$D|_{\check{C}^k(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^p)} = \begin{cases} \delta + (-1)^k d & \text{für } p > 0 \\ \delta + (-1)^k d \log & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

aus. Nachdem  $\delta$  und  $d \log$  vertauschen, gilt wieder  $D^2 = 0$ . Die Hyperkohomologiegruppen des Doppelkomplexes, also die Kohomologiegruppen des totalen Komplexes, heißen Deligne-Hyperkohomologiegruppen  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet)$  bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$ ; ebenso können wir wieder im direkten Limes zu den von Überdeckungen unabhängigen Kohomologiegruppen  $\check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet)$  übergehen.

**3.1.3 Charakteristische Klasse und Krümmung.** Am interessantesten für uns werden die Deligne-Hyperkohomologiegruppen  $\check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(m)_D^\bullet)$  mit  $n = m$  sein. Eine Klasse  $\xi \in \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  wird repräsentiert durch ein Element  $\alpha \in \text{Tot } {}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  des totalen Komplexes bezüglich irgendeiner offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  mit  $D(\alpha) = 0$ . Ein solches Element ist ein Satz  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  mit  $\alpha_0 \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  und  $\alpha_p \in \check{C}^{n-p}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^p)$  für  $0 < p \leq n$ . Die Kozykelbedingung lautet in Komponenten

$$\begin{aligned} D(\alpha) = (\delta \alpha_0, (-1)^n d \log(\alpha_0) + \delta \alpha_1, (-1)^{n-1} d \alpha_1 + \delta \alpha_2, \dots \\ \dots, -d \alpha_{n-1} + \delta \alpha_n) = 0, \end{aligned}$$

man beachte dabei, dass der Doppelkomplex bei  $m$  abgeschnitten ist, das heißt  $d\alpha_n$  fließt nicht in die Kozykelbedingung ein. Der lokalen  $(n+1)$ -Form  $d\alpha_n \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^{n+1})$  kommt stattdessen eine andere Bedeutung zu. Dazu berechnen wir

$$\delta d\alpha_n = dd\alpha_n = dd\alpha_{n-1} = 0,$$

wir haben es also mit einer sogar global definierten Form  $d\alpha_n \in \Omega^{n+1}(M)$  zu tun. Als nächstes stellen wir fest, dass sie unabhängig von der Wahl des Vertreters  $\alpha$  der Klasse  $\xi$  ist, ist nämlich

$$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \text{Tot } {}^n\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$$

ein anderer Vertreter mit  $\beta = \alpha + D(\gamma)$  für ein

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \in \text{Tot } {}^{n-1}\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet),$$

so wird wegen  $\beta_n = \alpha_n - d\gamma_{n-1}$  dieselbe  $(n+1)$ -Form  $d\beta_n = d\alpha_n$  erzeugt. Wir haben damit eine Abbildung

$$\text{curv} : \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet) \longrightarrow \Omega^{n+1}(M)$$

definiert, und nennen  $\text{curv}(\xi)$  die Krümmung der Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi$ . Diese Benennung können wir erst später über die geometrischen Interpretationen in den Graden  $n = 1, 2$  motivieren.

Wir können auch in der ersten Komponente eines Vertreters  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  einer Deligne-Klasse  $\xi = [\alpha]$  ein charakteristisches Datum entnehmen. Dazu projizieren wir diese erste Komponente

$$\text{Tot } {}^n\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet) \longrightarrow \check{C}^n(\mathfrak{U}, \underline{U}(1)) : (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \alpha_0$$

heraus. Die Kozykelbedingung  $D(\alpha) = 0$  liefert  $\delta\alpha_0 = 1$ , das heißt  $\alpha_0 \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  ist ein Kozykel, der in eine Klasse  $[\alpha_0] \in \check{H}^n(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  projiziert. Diese Klasse ändert sich nicht bei der Wahl eines anderen Vertreters der Deligne-Klasse  $\xi$ . Wir bilden sie mit dem Isomorphismus  $\omega$  aus (33) ab und haben so eine surjektive Abbildung

$$\text{char} : \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(M, \mathbb{Z}).$$

Wir halten einen Zusammenhang zwischen den beiden Abbildungen  $\text{char}$  und  $\text{curv}$  in einem Satz fest.

**SATZ 3.1C.** *Es sei  $\xi \in \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie. Dann ist das Bild ihrer charakteristischen Klasse unter dem Homomorphismus  $\iota_{\mathbb{Z}} : H^k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{dR}^k(M)$  genau die de Rham-Kohomologiekategorie der Krümmung von  $\xi$ , das heißt es gilt*

$$(\iota_{\mathbb{Z}} \circ \text{char})(\xi) = [\text{curv}(\xi)].$$

*Insbesondere definiert die Krümmung von  $\xi$  eine integrale Kohomologiekategorie.*

*Beweis.* Wir müssen nur gesammelte Ergebnisse zusammenfassen. Es werde  $\xi$  vertreten durch ein Element  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  mit  $D(\alpha) = 0$ . Dann haben wir gemäß der Definitionen zum einen  $[\text{curv}(\xi)] = [d\alpha_n]$  und zum anderen  $\text{char}(\xi) = \frac{1}{2\pi} [\delta \log(\alpha_0)]$  für eine Wahl eines Logarithmus  $\log(\alpha_0) \in \check{H}^n(M, \underline{\Omega}^0)$ . Nachdem  $\iota_{\mathbb{Z}} = dR^{-1} \circ \iota^*$  war, haben wir also die Klassen  $[d\alpha_n] \in H_{dR}^{n+1}(M)$  und  $(\iota^* \circ \text{char})(\xi) = [\delta \log(\alpha_0)] \in \check{H}^{n+1}(M, \mathbb{R})$  unter dem oben konstruierten Isomorphismus  $dR$  zwischen Čech- und de Rham-Kohomologiegruppen zu vergleichen. Dazu bemerken wir, dass  $(\log \alpha_0, \dots, \alpha_n)$  ein Element im totalen Komplex des Čech-de Rham-Doppelkomplexes ist, und zwar mit Rand

$$\begin{aligned} D_{dR}(\log \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = (\delta \log(\alpha_0), (-1)^n d(\log(\alpha_0)) + \delta \alpha_1, 0, \dots, 0, d\alpha_n). \end{aligned}$$

Die Kozykelbedingung  $D(\alpha)$  garantiert gerade, dass in der zweiten Komponente Null steht. Wir haben also einen  $n$ -Zickzack konstruiert mit Schweif  $\delta \log(\alpha_0)$  und Kopf  $d\alpha_n$  konstruiert, so dass wir per Definition

$$dR^{-1}([\delta \log(\alpha_0)]) = [d\alpha_n]$$

haben. Daraus folgt der Satz. □

Über die charakteristische Klasse unterscheiden wir einen wichtigen Typ von Deligne-Hyperkohomologieklassen.

**DEFINITION 3.1D.** *Eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi$  heißt trivial, wenn ihre charakteristische Klasse  $\text{char}(\xi) = 0$  ist.*

Mit dem Begriff der Trivialität von Deligne-Hyperkohomologieklassen ist Vorsicht geboten, denn eine triviale Klasse  $\xi$  ist nicht unbedingt trivial, d.h.  $\xi = 0$ . Wir können sogar sehr viele verschiedene triviale Klassen angeben. Dazu sei  $\varrho \in \Omega^n(M)$  eine  $n$ -Form auf  $M$  und  $r(\varrho) \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^n)$  die Einschränkung auf die  $U_i$ . Das Element

$$(1, 0, \dots, 0, r(\varrho)) \in \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$$

definiert eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie, nachdem  $\delta r(\varrho) = 0$  ist. Diese Kategorie bezeichnen wir mit  $\text{tr}(\varrho)$  und definieren dadurch eine Abbildung

$$\text{tr} : \Omega^n(M) \longrightarrow \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet).$$

**LEMMA 3.1E.** *Eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi$  ist genau dann trivial, wenn es eine Differentialform  $\varrho \in \Omega^n(M)$  gibt mit  $\text{tr}(\varrho) = \xi$ .*

*Beweis.* Sicherlich verschwindet die charakteristische Kategorie von  $\text{tr}(\varrho)$ , und wir haben  $\text{char} \circ \text{tr} = 0$ . Es sei nun  $\xi$  eine triviale Deligne-Kategorie, repräsentiert durch ein

Element  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  im totalen Komplex. Wir werden per Diagrammjagd ein Element  $(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in \text{Tot}^{n-1} \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  konstruieren mit

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) - \mathbf{D}(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) = (1, 0, \dots, 0, \alpha_n + \mathbf{d}\eta_{n-1}). \quad (35)$$

Aus  $[\alpha_0] = 1$  folgt die Existenz des ersten Elementes  $\eta_0$  mit  $\alpha_0 = \delta\eta_0$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \delta((-1)^n \mathbf{d}\log(\eta_0) + \alpha_1) &= (-1)^n \mathbf{d}\log(\delta\eta_0) + \delta\alpha_1 \\ &= (-1)^n \mathbf{d}\log(\alpha_0) + \delta\alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Kozykelbedingung an  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ . Wegen der Exaktheit der verallgemeinerten Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 3.1A gibt es also ein  $\eta_1$ , so dass die erste Komponente von (35) erfüllt ist,  $-\delta\eta_1 = (-1)^n \mathbf{d}\log(\eta_0) + \alpha_1$ . Es seien nun  $i$  Elemente  $\eta_0, \dots, \eta_i$  konstruiert, so dass die ersten  $i$  Komponenten der Gleichung (35) gelten. Wir berechnen wieder

$$\begin{aligned} \delta\left((-1)^{n-i} \mathbf{d}\log(\eta_i) + \alpha_{i+1}\right) &= (-1)^{n-i} \mathbf{d}\log(\delta\eta_i) + \delta\alpha_{i+1} \\ &= (-1)^{n-i} \mathbf{d}\log(\alpha_i) + \delta\alpha_{i+1} = 0 \end{aligned}$$

und bekommen die Existenz von  $\eta_{i+1}$  mit  $-\delta\eta_{i+1} = (-1)^{n-i} \mathbf{d}\log(\eta_i) + \alpha_{i+1}$ . Nach der Konstruktion des  $(n-1)$ -ten Elements setzen wir dann

$$\varrho_{\mathfrak{U}} := \alpha_n + \mathbf{d}\eta_{n-1},$$

wegen

$$\delta\varrho_{\mathfrak{U}} = \delta(\alpha_n + \mathbf{d}\eta_{n-1}) = \delta\alpha_n + \mathbf{d}\delta\eta_{n-1} = \delta\alpha_n + \mathbf{d}(-\mathbf{d}\eta_{n-2} - \alpha_{n-1}) = 0$$

wird so eine  $n$ -Form  $\varrho \in \Omega^n(M)$  mit  $r(\varrho) = \varrho_{\mathfrak{U}}$  definiert, so dass

$$[(\alpha_0, \dots, \alpha_n)] = \text{tr}(\varrho)$$

ist. □

Wir gehen zuletzt noch auf die Natürlichkeit der Deligne-Hyperkohomologie ein, die aus den funktoriellen Eigenschaften von Čech- und Garbenkohomologiefunktoren folgt. Dazu betrachten wir eine weitere Mannigfaltigkeit  $X$  und eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow M$ . Auf  $X$  erhalten wir eine offene, gute Überdeckung  $\mathfrak{V}$ , bestehend aus den offenen Mengen  $V_i := f^{-1}(U_i)$ , und den Čech-Deligne-Doppelkomplex  $\check{C}^\bullet(\mathfrak{V}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  bezüglich  $\mathfrak{V}$ . Jedes Element  $\alpha \in \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  kann zu einem Element  $f^*\alpha \in \text{Tot}^n \check{C}^\bullet(\mathfrak{V}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  zurückgezogen werden. Die Differentiale der Doppelkomplexe vertauschen mit dem Zurückziehen, das heißt es gilt  $\mathbf{D}(f^*\alpha) = f^*(\mathbf{D}(\alpha))$ . Insbesondere werden Klassen auf Klassen zurückgezogen, und für Krümmung und charakteristische Klasse einer Deligne-Klasse  $\xi$  gelten

$$f^* \text{curv}(\xi) = \text{curv}(f^*\xi) \quad \text{bzw.} \quad f^* \text{char}(\xi) = \text{char}(f^*\xi).$$

3.1.4 *Deligne-Hyperkohomologieklassen gleicher Krümmung.* Obwohl wir hier noch keinen direkten Zusammenhang zu physikalischen Theorien sehen, müssen wir die Deligne-Hyperkohomologie schon einmal darauf vorbereiten, später über die Krümmung ihrer Klassen an einen physikalischen Hintergrund gekoppelt zu werden. Daher wollen wir uns ein Bild machen von der Menge der Deligne-Hyperkohomologieklassen, die dieselbe vorgegebene Krümmung haben. Wir nähern uns diesem Problem über eine Operation der Kohomologiegruppe  $H^n(M, U(1))$  auf den Deligne-Hyperkohomologieklassen im Grad  $n$ ,

$$\Upsilon : H^n(M, U(1)) \times \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet) \longrightarrow \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet).$$

Diese Operation definieren wir wie folgt. Es sei  $\mathfrak{U}$  eine offene Überdeckung und  $g \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, U(1))$  und  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \text{Tot } {}^n\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  Kozykeln. Dann setzen wir

$$\Upsilon([g], [\alpha]) = [(\alpha_0 \cdot g, \alpha_1, \dots, \alpha_n)].$$

Wir müssen nun überprüfen, ob  $\Upsilon([g], [\alpha])$  eine Deligne-Klasse ist, der nicht von den Wahlen der Vertreter  $g$  und  $\alpha$  abhängt. Zuerst muss die Kozykelbedingung erfüllt sein. Dazu berechnen wir

$$D(\alpha_0 \cdot g, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\delta\alpha_0 \cdot \delta g, (-1)^n \text{dlog}(\alpha_0 \cdot g) + \delta\alpha_1, 0, \dots, 0).$$

$\delta\alpha_0$  und  $\delta g$  verschwinden nach Voraussetzung. Weiter haben wir, da  $g$  aus der Čech-Kokettengruppe mit Werten in der Garbe der lokal konstanten  $U(1)$ -wertigen Funktionen ist,

$$\text{dlog}(\alpha_0 \cdot g) = \text{dlog}(\alpha_0) + \text{dlog}(g) = \text{dlog}(\alpha_0),$$

das heißt,  $\Upsilon([g], [\alpha])$  ist ein Element der Deligne-Hyperkohomologie im Grad  $n$ . Bei der Wahl eines anderen Vertreters  $h \in [g]$  mit  $g = h \cdot \delta\eta$  und  $\beta \in [\alpha]$  mit  $\alpha = \beta + D(\gamma)$  haben wir

$$\begin{aligned} (\alpha_0 \cdot g, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (\beta_0 \cdot \delta\gamma_0 \cdot h \cdot \delta\eta, \beta_1 \\ &\quad + (-1)^n \text{dlog}(\gamma_0) + \delta\gamma_1, \dots, -\text{d}\gamma_{n-1} + \beta_n) \\ &= (\beta_0 \cdot h, \beta_1, \dots, \beta_n) + D(\eta \cdot \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}), \end{aligned}$$

nachdem auch  $\eta$  lokal konstant und damit  $D(\eta) = (\delta\eta, 0, \dots, 0)$  ist. Also ist  $\Upsilon([g], [\alpha])$  unabhängig von der Wahl der Vertreter. Da außerdem klar ist, dass das Einselement von  $H^n(M, U(1))$  trivial operiert, und die Assoziativität bei mehrmaligem Operieren durch die Assoziativität der Multiplikation in  $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  gewährleistet wird, definiert  $\Upsilon$  eine Operation. Der folgende Satz macht sie für uns interessant.

**SATZ 3.1F.** *Die Krümmung  $\text{curv}$  von Deligne-Hyperkohomologieklassen ist für alle  $n > 0$  eine bahntrennende Invariante der Operation  $\Upsilon$  von  $H^n(M, U(1))$  auf  $\check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$ .*

*Beweis.* Die Invarianz der Krümmung unter der Operation  $\Upsilon$  folgt sofort aus den Definitionen, da die Operation in der ersten Komponente wirkt, und die Krümmung in der letzten Komponente eines Kozykels  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \text{Tot } {}^n\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  entnommen wird; beide sind aber für  $n > 0$  verschieden, das heißt es gilt

$$\text{curv}(\Upsilon(\gamma, \xi)) = \text{curv}(\xi)$$

für alle  $\gamma \in H^n(M, U(1))$  und  $\xi \in \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$ . Alle Elemente in einer Bahn von  $\Upsilon$  haben also dieselbe Krümmung. Um zu zeigen, dass  $\text{curv}$  die Bahnen der Operation trennt, nehmen wir zwei Deligne-Hyperkohomologieklassen  $\xi$  und  $\zeta$  mit gleicher Krümmung  $\text{curv}(\xi) = \text{curv}(\zeta)$  und konstruieren ein Element  $[g] \in H^n(M, U(1))$ , so dass  $\Upsilon([g], \xi) = \zeta$  ist.

Es werden die Klassen bezüglich einer guten Überdeckung  $\mathfrak{U}$  vertreten durch  $\xi = [(\xi_0, \dots, \xi_n)]$  und  $\zeta = [(\zeta_0, \dots, \zeta_n)]$ , dann werden wir einen Kozykel  $g \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, U(1))$  und eine Deligne-Kokette  $(\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$  konstruieren mit

$$(g \cdot \xi_0, \dots, \xi_n) = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) + D(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}). \quad (36)$$

Wir beginnen eine Diagrammjagd im Čech-Deligne-Doppelkomplex. Aus der Gleichheit der Krümmungen folgt  $d(\xi_n - \zeta_n) = 0$ . Dann verwenden wir, dass wir eine gute Überdeckung mit zusammenziehbaren Teilmengen gewählt haben, es gibt also ein Element  $\eta_{n-1} \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^{n-1})$  mit  $\xi_n = -d\eta_{n-1} + \zeta_n$ .

Es seien jetzt die letzten  $i$  Elemente  $\eta_{n-i}, \dots, \eta_{n-1}$  konstruiert, so dass die hinteren  $i$  Komponenten von (36) erfüllt sind, insbesondere (mit bequemem  $\eta_n = 0$  für den Fall  $i = 1$ ) also

$$\xi_{n-i+1} = \zeta_{n-i+1} + (-1)^{i-1} d\eta_{n-i} + \delta\eta_{n-i+1}.$$

Jetzt verwenden wir die Kozykelbedingungen  $D(\xi) = 0$  und  $D(\zeta) = 0$  in der  $(n - i + 1)$ -ten Komponente,

$$(-1)^i d\xi_{n-i} + \delta\xi_{n-i+1} = 0 \quad \text{und} \quad (-1)^i d\zeta_{n-i} + \delta\zeta_{n-i+1} = 0 \quad (37)$$

und berechnen

$$0 = (-1)^i d\xi_{n-i} + \delta\xi_{n-i+1} = (-1)^i d(\xi_{n-i} - \zeta_{n-i} - \delta\eta_{n-i}).$$

Wieder gibt es also ein Element  $\eta_{n-i-1} \in \check{C}^i(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^{n-i-1})$  mit

$$(-1)^i d\eta_{n-i-1} = \xi_{n-i} - \zeta_{n-i} - \delta\eta_{n-i}.$$

Das ist genau die  $(n - i)$ -te Komponente von (36).

Wir führen diese Konstruktion fort bis zur zweiten Komponente. Dort gewinnen wir also die Existenz von  $\eta'_0 \in \check{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^0)$  mit

$$\xi_1 - \zeta_1 - (-1)^n d\eta'_0 = \delta\eta_1. \quad (38)$$



Um ein Element  $\eta_0 \in \check{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  im Čech-Deligne-Doppelkomplex zu bekommen, setzen wir  $\eta_0 = \exp(i\eta'_0)$ . Dann definieren wir  $g := \delta\eta_0 \cdot \zeta_0 \cdot \xi_0^{-1} \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ , wissen aber noch nicht, ob  $g$  auch, wie verlangt, lokal konstant ist. Es gilt aber die erste Komponente von (36), nämlich

$$g \cdot \xi_0 = \zeta_0 \cdot \delta\eta_0.$$

Wir berechnen unter Verwendung der Kozykelbedingungen (37) im Grad  $i = n$  und mit (38)

$$\begin{aligned} \text{dlog}(g) &= -\text{dlog}(\xi_0) + \text{dlog}(\zeta_0) + \delta\text{dlog}(\eta_0) \\ &= (-1)^n \delta(\xi_1 - \zeta_1 - (-1)^n \text{d}\eta_0) = (-1)^n \delta\delta\eta_1 = 0, \end{aligned}$$

also ist  $g$  lokal konstant. Gemäß seiner Definition ist es außerdem ein Kozykel, repräsentiert also eine Kohomologieklass  $[g] \in H^n(M, U(1))$ , die die geforderten Bedingungen erfüllt.  $\square$

Wir kommen jetzt zu dem Problem zurück, zu entscheiden, welche Deligne-Hyperkohomologieklassen im Grad  $n$  eine feste Krümmung  $H \in \Omega^{n+1}(M)$  haben. Solche Klassen bezeichnen wir mit  $w_n(M, H)$ . Diese Menge ist offenbar leer, wenn  $H$  nicht geschlossen ist, oder keine integrale Kohomologieklass definiert. Da wir im letzten Satz gezeigt haben, dass zwei Klassen in  $w_n(M, H)$  in einer Bahn unter der Operation  $\Upsilon$  liegen, folgern wir:

**KOROLLAR 3.1G.** *Die Menge  $w_n(M, H)$  von Deligne-Hyperkohomologieklassen im Grad  $n$  gleicher Krümmung  $H$  ist ein  $H^n(M, U(1))$ -Torsor.*

Diese Aussage wird auch (ohne Beweis) in [GaRei] behauptet. Wir müssen hier nach Satz 3.1F nur noch zeigen, dass die Operation  $\Upsilon$  auch frei ist. Dazu betrachten wir die charakteristische Klasse, für die wir direkt aus der Definition die Regel

$$\text{char}(\Upsilon([g], \xi)) = \text{char}(\xi) + \omega([g])$$

feststellen; wenn also die Deligne-Hyperkohomologieklassen  $\Upsilon([g], \xi)$  und  $\xi$  gleich sind, dann ist  $\omega([g]) = 0$ , also  $[g] = 1$ .

**3.1.5 Holonomie einer Deligne-Klasse.** Alle nötigen Informationen zur Definition der Holonomie einer Deligne-Klasse werden gegeben durch den folgenden

**SATZ 3.1H.** *Es bezeichne  $\Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M)$  diejenigen Formen in  $\Omega^n(M)$ , die geschlossen sind und eine integrale Kohomologieklass definieren. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M) \xrightarrow{\iota} \Omega^n(M) \xrightarrow{\text{tr}} \check{H}^n(M, \mathbb{Z}(n)_D^\bullet) \xrightarrow{\text{char}} H^{n+1}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad (39)$$

*abelscher Gruppen exakt.*

*Beweis.* Die Abbildung  $\text{char}$  war unmittelbar als surjektive Projektion definiert, und Lemma 3.1E ist äquivalent zur Exaktheit der Sequenz bei  $\check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$ . Also müssen wir nur noch die Exaktheit bei  $\Omega^n(M)$  prüfen.

Dazu sei  $\varrho \in \Omega^n(M)$  und  $\text{tr}(\varrho) = 0$  als Deligne-Hyperkohomologiekategorie. Das heißt es gibt ein Element  $(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in \text{Tot}^{n-1} \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$ , so dass  $(1, 0, \dots, 0, r(\varrho)) = D(\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$  ist. Wir wählen einen Logarithmus  $\log(\eta_0) \in \check{C}^n(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{R}})$ , dann ist  $(\log(\eta_0), \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$  ein  $n$ -Zickzack mit Schweif  $\delta \log(\eta_0)$  und Kopf  $\varrho$ , insbesondere ist  $\varrho = d\eta_{n-1}$  geschlossen und repräsentiert die de Rham-Kohomologiekategorie  $dR^{-1}([\delta \log(\eta_0)]) = [\varrho]$ . Andererseits liegt diese Kategorie im Bild von  $\iota^* : H^n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(M, \mathbb{R})$ , nämlich mit Urbild

$$\omega([\eta_0]) = \frac{1}{2\pi} [\delta \log(\eta_0)] \in H^n(M, \mathbb{Z}).$$

Daher ist  $[\varrho]$  eine integrale Kohomologiekategorie und  $\varrho \in \Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M)$ .

Ist umgekehrt  $\varrho \in \Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M)$ , so ist erstens  $d\varrho = 0$  und zweitens gibt es ein Element  $z \in H^n(M, \mathbb{Z})$  mit  $\iota_{\mathbb{Z}}(z) = [\varrho]$ . Wir setzen  $\alpha_0 := \omega^{-1}(z) \in \check{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ . Die Surjektivität der charakteristischen Kategorie  $\text{char}$  bedeutet, dass es eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi \in \check{H}^{n-1}(M, \underline{\mathbb{Z}}(n-1)_D^\bullet)$  gibt mit  $\text{char}(\xi) = [\alpha_0]$ . Nach Satz 3.1C gilt

$$[\text{curv}(\xi)] = \iota_{\mathbb{Z}}(\text{char}(\xi)) = \iota_{\mathbb{Z}}(z) = [\varrho],$$

das heißt es gibt eine  $(n-1)$ -Form  $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$  mit  $\text{curv}(\xi) = \varrho + d\eta$ . Wählen wir einen Vertreter  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  der Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi$  ist, haben wir

$$D(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} - r(\eta)) = (1, 0, \dots, 0, d\alpha_{n-1} - d\eta) = (1, 0, \dots, 0, \varrho),$$

das heißt  $\text{tr}(\varrho) = 0$ . □

Wir untersuchen die Konsequenzen dieses Satzes für den Fall, dass  $M$  orientiert ist, sowie keinen Rand und die Dimension  $n$  hat. Dann ist aus Dimensionsgründen  $H^{n+1}(M, \mathbb{Z}) = 0$  und die exakte Sequenz (39) reduziert sich auf

$$0 \longrightarrow \Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M) \xrightarrow{\iota} \Omega^n(M) \xrightarrow{\text{tr}} \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet) \longrightarrow 0. \quad (40)$$

Es sei nun  $\xi \in \check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$  eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie. Da  $\text{tr}$  surjektiv ist, gibt es eine Differentialform  $\varrho \in \Omega^n(M)$  mit  $\text{tr}(\varrho) = \xi$ . Wir können auch zwei möglicherweise verschiedene Wahlen  $\varrho_1, \varrho_2$  treffen. Dann ist  $\text{tr}(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$ , also  $\Delta\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 \in \ker \text{tr} = \Omega_{c, \mathbb{Z}}^n(M)$ . Demnach definiert  $\Delta\varrho$  eine integrale Kohomologiekategorie  $[\Delta\varrho] \in H_{dR}^n(M)$ .

**DEFINITION 3.11.** *Die Zahl*

$$\text{hol}(\xi, M) := \exp i \int_M \varrho \in U(1)$$

heißt die *Holonomie* von  $\xi$  um  $M$ .

Die Holonomie  $\text{hol}(\xi, M)$  ist wohldefiniert, da verschiedene Wahlen von  $\varrho$  im Exponenten zu einer Differenz  $i \int_M \Delta \varrho \in 2\pi i \mathbb{Z}$  führt. Hier geht ein, dass  $M$  als Mannigfaltigkeit ohne Rand vorausgesetzt wurde. Wir können die Einschränkungen an  $M$  bezüglich Rand, Dimension und Orientierbarkeit aber auch wieder fallen lassen, und eine allgemeinere Definition angeben.

**DEFINITION 3.1J.** *Es sei  $\Sigma$  eine glatte, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ohne Rand und  $\phi : \Sigma \rightarrow M$  eine stetige Abbildung. Für eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi \in \check{H}^n(M, \mathbb{Z}(n)_{\mathbb{D}}^{\bullet})$  nennen wir*

$$\text{hol}(\xi, \phi) := \text{hol}(\phi^* \xi, \Sigma) \quad (41)$$

die Holonomie von  $\xi$  um  $\Sigma$ .

Wir betrachten diese Definition in zwei Spezialfällen. Zuerst kann die Deligne-Klasse natürlich auch schon vor dem Zurückziehen trivial sein, also der Form  $\xi = \text{tr}(\varrho)$  für eine Differentialform  $\varrho \in \Omega^n(M)$ . Dann haben wir sofort

$$\text{hol}(\xi, \phi) = \exp i \int_{\Sigma} \phi^* \varrho. \quad (42)$$

Außerdem können wir den Fall betrachten, dass  $\Sigma$  Rand einer  $(n+1)$ -dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit  $B$  ist. Ihre Orientierung sei so gewählt, dass die auf dem Rand  $\partial B = \Sigma$  induzierte Orientierung äquivalent zu der von  $\Sigma$  ist. Wir nehmen außerdem an, dass sich  $\phi$  zu einer Abbildung  $\tilde{\phi} : B \rightarrow M$  fortsetzen läßt, wählen ein  $\varrho \in \Omega^n(\Sigma)$  mit  $\text{tr}(\varrho) = \phi^* \xi$  und berechnen  $\text{curv}(\text{tr}(\varrho)) = d\varrho$ . Das ergibt

$$\text{hol}(\xi, \phi) = \exp i \int_{\Sigma} \varrho = \exp i \int_B \tilde{\phi}^* \text{curv}(\xi). \quad (43)$$

Hier sind schon Analogien zu den in der Einleitung angedeuteten Möglichkeiten zu sehen, Kopplungsterme für Punktteilchen oder Strings an Felder aufzustellen. Bevor wir diese Analogien jedoch eingehender diskutieren werden, wollen wir uns der Deligne-Hyperkohomologie zunächst auf geometrischem Wege nähern.

**3.2 Hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang.** Geradenbündel sind ein wesentlicher Bestandteil der noch zu definierenden Gerben; es ist daher nicht zu vermeiden, dass wir uns in diesem Abschnitt zuerst mit Geradenbündeln beschäftigen. Eine hermitesche Metrik auf einem Geradenbündel ist eine Zusatzstruktur, die eine Klassifizierung hermitescher Geradenbündel durch die Kohomologiegruppe  $H^2(M, \mathbb{Z})$  zulässt. Ein Zusammenhang auf einem hermiteschen Geradenbündel ist eine weitere Zusatzstruktur, dessen Einbeziehung in die Klassifizierung zur Deligne-Hyperkohomologietheorie führt.

Dieser Abschnitt dient aber nicht nur der Vorbereitung, sondern wird auch die in der Einleitung angedeutete Analogie zwischen hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang und Gerben mit Zusammenhang und Krümmung und ihre analoge Anwendung in der Formulierung eines Kopplungstermes verdeutlichen. Wir werden schließlich sehr bequem Holonomie von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang definieren, und sehen, dass sie zur Definition eines solchen Kopplungstermes geeignet ist.

### 3.2.1 Hermitesche Geradenbündel. Es sei $M$ eine Mannigfaltigkeit.

DEFINITION 3.2A. Ein Geradenbündel  $p : L \rightarrow M$  über  $M$  ist ein komplexes Vektorbündel vom Rang eins.

Jede Faser  $L|_x := p^{-1}(\{x\})$  über einem Punkt  $x \in M$  ist ein komplexer, eindimensionaler Vektorraum. Ein Schnitt in einem solchen Bündel auf einer offenen Untermenge  $U \subseteq M$  ist eine glatte Abbildung  $s : U \rightarrow L$ , so dass  $p \circ s = \text{id}_M$  ist. Jedes Vektorbündel hat zum Beispiel den globalen Schnitt  $0 : M \hookrightarrow L$ , der aus jeder Faser das Nullelement auswählt.

Eine Metrik auf einem Geradenbündel soll den Elementen von  $L$  Längen zuordnen, ist also eine glatte Funktion  $h : L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Die Zuordnung soll so sein, dass nur die Nullvektoren jeder Faser die Länge Null haben. Dazu definiert man am besten das Komplement  $L^+ := L \setminus \text{im } 0$  und verlangt  $h(x) > 0$  für alle  $x \in L^+$ . Für eine hermitesche Metrik verlangen wir zusätzlich eine Skalierungsregel, und zwar soll  $h(\lambda x) = |\lambda|^2 h(x)$  sein für  $x \in L$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ein Geradenbündel mit einer hermiteschen Metrik heißt hermitesches Geradenbündel; wir werden im folgenden die Metrik häufig nicht explizit benennen.

Als Beispiel eines Geradenbündels können wir auf jeder Mannigfaltigkeit das Bündel  $\partial_1 : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$  konstruieren, wobei  $\partial_1$  die erste Komponente des direkten Produktes wegläßt. Dieses Bündel kann man immer mit der hermiteschen Standard-Metrik  $h(z, x) := |z|^2$  ausstatten.

Zum Vergleich zweier Geradenbündel definieren wir einen Isomorphismus von Geradenbündeln  $p_1 : L_1 \rightarrow M$  und  $p_2 : L_2 \rightarrow M$  als einen Diffeomorphismus  $\alpha : L_1 \rightarrow L_2$ , der mit den Projektionen nach  $M$  verträglich ist, das heißt es gilt  $p_1 = p_2 \circ \alpha$ . Über jedem Punkt  $x \in M$  ist  $\alpha : L_1|_x \rightarrow L_2|_x$  ein Vektorraumisomorphismus. Gibt es auf  $L_1$  und  $L_2$  hermitesche Metriken  $h_1$  bzw.  $h_2$ , so nennen wir einen Isomorphismus  $\alpha : L_1 \rightarrow L_2$  einen Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln, wenn er die hermiteschen Metriken respektiert, das heißt es gilt  $h_1 = h_2 \circ \alpha$ .

Ein (hermitesches) Geradenbündel  $L \rightarrow M$  heißt trivial, wenn es isomorph zum Bündel  $\partial_1 : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$  (mit der hermiteschen Standard-Metrik) ist. Triviale Geradenbündel sind auch dadurch ausgezeichnet, dass sie globale Schnitte  $s : M \rightarrow L^+$  erlauben. Überhaupt wird es sich als sinnvoll herausstellen, wie hier für triviale Bündel, nur Isomorphieklassen von (hermiteschen) Geradenbündeln zu betrachten.

Aus zwei gegebenen Geradenbündeln  $p_1 : L_1 \rightarrow M$  und  $p_2 : L_2 \rightarrow M$  können wir das Tensorprodukt  $L_1 \otimes L_2$  konstruieren; es ist dasjenige Geradenbündel über  $M$  mit Fasern

$$(L_1 \otimes L_2)|_x = L_1|_x \otimes L_2|_x.$$

Hermitesche Metriken  $h_1$  bzw.  $h_2$  auf den Bündeln ergeben eine hermitesche Metrik  $h_1 \otimes h_2$  auf  $L_1 \otimes L_2$ . Das Tensorprodukt definiert eine Gruppenstruktur auf der Menge der Isomorphieklassen von (hermiteschen) Geradenbündeln.

Das Einselement ist die Isomorphieklasse der trivialen Bündel. Die zu der Isomorphieklasse eines Geradenbündel  $L \rightarrow M$  inverse Isomorphieklasse ist die des dualen Bündels  $L^* \rightarrow M$ , dessen Fasern die Dualräume der Fasern von  $L$  sind,

$$L^*|_x := \text{Hom}(L_x, \mathbb{C}).$$

Aus einer hermiteschen Metrik auf  $L$  bekommen wir ebenfalls eine hermitesche Metrik auf  $L^*$ . Die kanonische Paarung ergibt dann faserweise einen Isomorphismus  $L|_x \otimes L^*|_x \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $L \otimes L^*$  ein triviales hermitesches Geradenbündel ist. Anhand einer hermiteschen Metrik auf einem Geradenbündel  $L$  kann man Schnitte  $s : U \rightarrow L$  zu Schnitten  $s^* : U \rightarrow L^*$  im dualen Bündel machen.

Hermitesche Geradenbündel können zurückgezogen werden. Dazu betrachten wir eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow M$  und ein Geradenbündel  $p : L \rightarrow M$  über  $M$  mit hermitescher Metrik  $h$ . Dann ist das Faserprodukt

$$f^{-1}L := X \times_M L := \{(x, l) \in X \times L \mid f(x) = p(l)\}$$

zusammen mit der Abbildung  $\partial_2 : f^{-1}L \rightarrow M$ , die das zweite Element wegläßt, ein hermitesches Geradenbündel mit Metrik  $h_f := h \circ \partial_2$ . Seine Fasern sind  $(f^{-1}L)|_n = L|_{f(n)}$ . Jeden Schnitt  $s : U \rightarrow L$  können wir mit  $f$  zu einem Schnitt  $f^*s$  im Bündel  $f^{-1}L$  zurückziehen, ebenso überträgt sich ein Isomorphismus  $\alpha : L \rightarrow K$  von hermiteschen Geradenbündeln über  $M$  zu einem Isomorphismus

$$f^*\alpha : f^{-1}L \rightarrow f^{-1}K : (l, x) \mapsto (\alpha(l), x) \quad (44)$$

von hermiteschen Geradenbündeln über  $X$ .

**3.2.2 Die Chern-Klasse eines hermiteschen Geradenbündels.** Wenn man von Bündeln spricht, redet man auch gerne von Übergangsfunktionen, mit dem Ziel, die topologisch motivierte Definition eines Bündels in einen algebraischen Rahmen zu rücken. Zur Konstruktion von Übergangsfunktionen wählen wir eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  von  $M$ , die Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow L^+$  erlaubt. Durch geeignete Normierung mit der hermiteschen Metrik  $h$  auf  $L$  können diese Schnitte immer so gewählt werden, dass  $h(s_i(x)) = 1$  ist für alle  $x \in U_i$ , solche Schnitte nennen wir Einheitschnitte.

Auf zweifachen Schnittmengen  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  vergleichen wir die Einheitschnitte  $s_i$  und  $s_j$ . Für einen Punkt  $x \in U_i \cap U_j$  liegen  $s_i(x)$  und  $s_j(x)$  in derselben Faser  $L|_x$ , und unterscheiden sich als Einheitsvektoren in einem komplexen Vektorraum um ein Element  $g_{ij}(x) \in U(1)$ , nämlich

$$s_i(x) = g_{ij}(x) s_j(x). \quad (45)$$

Aus der Differenzierbarkeit der Schnitte folgt, dass  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  ebenfalls eine differenzierbare Abbildung ist. Es gilt unmittelbar  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ . Auf dreifachen Schnittmengen  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  folgt aus  $s_i = g_{ij} \cdot s_j$ ,  $s_j = g_{jk} \cdot s_k$  und  $s_i = g_{ik} \cdot s_k$  die Eigenschaft  $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$ .

Die so konstruierten Abbildungen heißen Übergangsfunktionen des hermiteschen Geradenbündels  $L \rightarrow M$  und hängen von der Wahl der Überdeckung und der Wahl der Schnitte ab. Wählen wir andere Einheitsschnitte  $s'_i : U_i \rightarrow L^+$  auf derselben Überdeckung, so können wir die Schnitte  $s_i$  und  $s'_i$  durch eine Abbildung  $\lambda_i : U_i \rightarrow U(1)$  vergleichen als  $s'_i(x) = \lambda_i(x) s_i(x)$ . Dann gilt für die Übergangsfunktionen  $g'_{ij}$  bezüglich dieser Schnitte die Regel

$$g_{ij} = g'_{ij} \cdot \lambda_j \cdot \lambda_i^{-1}.$$

Diese Eigenschaften rücken die Übergangsfunktionen in den Kontext der Čech-Kohomologietheorie. Die Übergangsfunktionen  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  bilden darin gerade ein Element  $g$  der Čech-Kokettengruppe  $\check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ . Weiter ist  $(\delta g)_{ijk} = g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij}$ , von der rechten Seite hatten wir oben gezeigt, dass sie verschwindet. Es gilt also  $\delta g = 1$ , das heißt  $g$  definiert ein Element in der Čech-Kohomologiegruppe  $[g] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ . Bei der Wahl anderer Schnitte mit einem anderen Čech-Kozykel  $g'$  ergaben sich Abbildungen  $\lambda_i : U_i \rightarrow U(1)$ , diese bilden ein Element  $\lambda \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ , so dass genau  $g = \delta \lambda$  gilt. Das bedeutet nichts anderes als  $[g] = [g']$ .

Jetzt betrachten wir eine andere offene Überdeckung  $\mathfrak{V}$  von  $M$ . Wir können davon ausgehen, dass  $\mathfrak{V}$  eine Verfeinerung von  $\mathfrak{U}$  ist, denn andernfalls gehen wir zu einer gemeinsamen Verfeinerung  $\mathfrak{W}$  über und argumentieren dann zweimal, nämlich für  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{W}$  und dann für  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{W}$ . Es sei  $f : J \rightarrow I$  eine Verfeinerungsabbildung. Mit den Inklusionen  $\iota_j : V_j \hookrightarrow U_{f(j)}$  ziehen wir die Schnitte  $s_i$  zurück zu Einheitsschnitten  $t_j := \iota_j^* s_{f(j)} : V_j \rightarrow \iota_j^{-1} L$ . Für die Übergangsfunktionen  $h : V_i \cap V_j \rightarrow U(1)$  bezüglich dieser Schnitte gilt  $f^*(g) = h$ , daher werden die Klassen  $[g]$  und  $[h]$  im direkten Limes (31) miteinander identifiziert und definieren demnach dasselbe Element in  $\check{H}^1(M, \underline{U}(1))$ . Damit haben wir gezeigt:

**LEMMA 3.2B (Weil, Kostant).** *Die Kohomologieklassse  $[g] \in \check{H}^1(M, \underline{U}(1))$  des aus einem hermiteschen Geradenbündel konstruierten Čech-Kozykels ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung und der Schnitte  $s_i$ .*

Wir können auch den umgekehrten Weg beschreiten und aus einem gegebenen Kozykel  $g \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  bezüglich einer offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  ein hermitesches Geradenbündel konstruieren, so dass dessen Čech-Kozykel genau die Kohomologieklassse  $[g]$  vertritt. Dazu definieren wir den Bündelraum als den Quotienten

$$L := \coprod_{i \in I} (U_i \times \mathbb{C}) / (i, x, z) \sim_g (j, x, g_{ij}(x) z)$$

mit einer Projektion  $p(i, x, z) := x$  nach  $M$ , und stattdessen ihn mit der hermiteschen Standardmetrik aus. Aus der Kozykeleigenschaft von  $g$  folgt, dass  $\sim_g$  eine Äquivalenzrelation ist. Auf jeder Teilmenge  $U_i$  haben wir den Schnitt  $s_i : U_i \rightarrow L : x \mapsto (i, x, 1)$ , deren Übergangsfunktionen gerade die  $g_{ij}$  sind.

Es ist bequem und üblich, Vektorbündeln vom Rang  $k$  charakteristische Klassen in  $H^{2k}(M, \mathbb{Z})$  zuzuordnen. Das wollen wir auch für hermitesche Geradenbündel tun, und

bilden dazu die Klasse  $[g]$  mit dem Gruppenisomorphismus (33)  $\omega : \check{H}^k(M, \underline{U}(1)) \longrightarrow H^{k+1}(M, \mathbb{Z})$  ab. Dadurch erhalten wir die sogenannte Chern-Klasse  $\text{ch}(L) := \omega([g]) \in H^2(M, \mathbb{Z})$  des Geradenbündels. Die Chern-Klasse spielt eine wichtige Rolle für die Klassifizierung von hermiteschen Geradenbündeln.

Natürlich würden wir gerne wissen, wie sich die durch das Tensorprodukt gegebene Gruppenstruktur auf den Isomorphieklassen von Geradenbündeln mit der Chern-Klasse verträgt. Als Voraussetzung dafür stellen wir zunächst fest, dass im Fall zweier isomorpher Geradenbündel  $L_1$  und  $L_2$  mit einem Isomorphismus  $\alpha : L_1 \longrightarrow L_2$  und einer Wahl von Schnitten  $s_i : U_i \longrightarrow L_1^+$  für  $L_1$  für das andere Bündel die Schnitte  $\alpha \circ s_i : U_i \longrightarrow L_2^+$  gewählt werden können. Da  $\alpha$  faserweise ein  $\mathbb{C}$ -linearer Vektorraumisomorphismus ist, folgt aus der die Übergangsfunktionen definierenden Gleichung  $(\alpha \circ s_i)(x) = g_{ij}(x)(\alpha \circ s_j)(x)$  die obere Gleichung (45), wir erhalten also für  $L_2$  dieselben Übergangsfunktionen, und damit auch dieselbe Chern-Klasse.

Als nächstes sehen wir uns das Tensorprodukt zweier Geradenbündel  $L_1$  und  $L_2$  mit Schnitten  $s_i : U_i \longrightarrow L_1$  bzw.  $t_i : U_i \longrightarrow L_2$  und Übergangsfunktionen  $g_{ij}$  bzw.  $h_{ij}$  an. Im Tensorprodukt  $L_1 \otimes L_2$  definieren wir die Schnitte  $s_i \otimes t_i : U_i \longrightarrow L_1 \otimes L_2$ , diese geben die Übergangsfunktionen  $g_{ij}h_{ij}$  und entsprechend die Kohomologieklass  $[gh]$ . Da wir mit dem Gruppenhomomorphismus  $\omega$  zu einer additiven Schreibweise übergehen, haben wir

$$\text{ch}(L_1 \otimes L_2) = \text{ch}(L_1) + \text{ch}(L_2).$$

Ein triviales Bündel ist per Definition isomorph zum Bündel  $\mathbb{C} \times M \longrightarrow M$ , und hat deshalb dessen Chern-Klasse. Einheitsschnitte in diesem Bündel sind lokale Funktionen  $s_i : U_i \longrightarrow U(1)$ , die Übergangsfunktionen  $s_i = g_{ij} \cdot s_j$  bestimmen, für die sofort  $g = \delta s^{-1}$  folgt, wobei wir die Schnitte als ein Element  $s \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  aufgefasst haben. Die Chern-Klasse eines trivialen Bündels ist daher Null. Insbesondere folgt für das triviale Bündel  $L \otimes L^*$  die Chern-Klasse des dualen Bündels

$$\text{ch}(L^*) = -\text{ch}(L).$$

Diese Regeln fassen wir zusammen zu dem folgenden

**SATZ 3.2C (Weil, Kostant).** *Die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln über  $M$  ist mittels der Chern-Klasse isomorph zur Kohomologiegruppe  $H^2(M, \mathbb{Z})$ .*

*Beweis.* Wir haben die Abbildung, die einem Geradenbündel seine Chern-Klasse zugeordnet, schon konstruiert, und konstruktiv gezeigt, dass sie surjektiv ist. Wir haben außerdem gesehen, dass die Chern-Klasse mit der durch das Tensorprodukt definierten Gruppenstruktur auf den Isomorphieklassen verträglich ist. Zum Beweis der Injektivität nehmen wir an, dass ein Geradenbündel  $L$  bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  und Schnitten  $s_i : U \longrightarrow L^+$  einen Kozykel  $g$  hat mit  $\omega([g]) = 1$ , das heißt  $g = \delta\lambda$  für ein  $\lambda \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ . Dann definieren wir neue Schnitte  $t_i := s_i \cdot \lambda_i^{-1}$ . Für sie gilt  $t_i = s_i \cdot \lambda_i^{-1} = g_{ij} \cdot s_j \cdot \lambda_i^{-1} = t_j$ , das heißt die  $t_i$  ergeben einen globalen Schnitt.  $\square$

3.2.3 *Zusammenhang und Krümmung eines Geradenbündels.* Zusammenhänge auf Vektorbündeln sind eine Regel, wie Vektoren aus verschiedenen Fasern miteinander verglichen werden können. Ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel erlaubt zum Beispiel die Definition eines Paralleltransports von Vektoren entlang von Kurven in  $M$ . Wir verwenden hier eine auf ein Geradenbündel spezifizierte

DEFINITION 3.2D. *Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf einem Geradenbündel  $p : L \rightarrow M$  ordnet jedem Schnitt  $s : U \rightarrow L$  auf einer offenen Untermenge  $U \subseteq M$  eine  $L$ -wertige lokale Einsform  $\nabla s \in \Omega^1(U, L)$  zu, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Die Zuordnung  $s \mapsto \nabla s$  ist verträglich mit der Einschränkung auf kleinere Untermengen.*
- (ii) *Für festes  $U$  ist  $s \mapsto \nabla s$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.*
- (iii) *Für eine Funktion  $g \in C^\infty(U, \mathbb{C})$  gilt die Leibnitzregel*

$$\nabla(g \cdot s) = g \cdot \nabla s + dg \otimes s.$$

Wir können zum Beispiel auf einem trivialen Bündel  $L \rightarrow M$  den sogenannten trivialen Zusammenhang konstruieren, indem wir einem Schnitt  $s : U \rightarrow \mathbb{C}$  seine äußere Ableitung  $\nabla^{\text{tr}}(s) := ds \otimes 1$  zuordnen; mit 1 bezeichnen wir den globalen, konstanten Schnitt  $1 : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Es gibt allerdings auch auf einem trivialen Bündel andere, nicht-triviale Zusammenhänge.

Wenn man nämlich einen Zusammenhang  $\nabla$  auf einem hermiteschen Geradenbündel  $L$  über  $M$  hat, so kann man viele weitere Zusammenhänge erzeugen. Dazu nimmt man eine beliebige Einsform  $\alpha \in \Omega^1(M)$  und definiert den Zusammenhang  $\nabla + \alpha$  auf Schnitten  $s : U \rightarrow L$  durch  $(\nabla + \alpha)(s) = \nabla(s) + \alpha \otimes s$ .

Um beim Vergleich von zwei hermiteschen Geradenbündeln auch eventuell vorhandene Zusammenhänge berücksichtigen zu können, definieren wir einen Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang als einen Isomorphismus  $\alpha : L \rightarrow K$  von hermiteschen Geradenbündeln, der mit den Zusammenhängen  $\nabla_L$  und  $\nabla_K$  auf  $L$  bzw.  $K$  verträglich ist in der Weise, dass

$$(1 \otimes \alpha) \nabla_L(s) = \nabla_K(\alpha \circ s) \quad (46)$$

gilt für jeden Schnitt  $s : U \rightarrow L$ .

Sehen wir uns nun die bekannten Operationen mit hermiteschen Geradenbündeln in Bezug auf Zusammenhänge an.

- $\alpha$ ) Auf dem Tensorprodukt  $L \otimes K$  zweier hermitescher Geradenbündel über  $M$  können wir anhand von Zusammenhängen  $\nabla_L$  auf  $L$  und  $\nabla_K$  auf  $K$  einen Zusammenhang  $\nabla_L + \nabla_K$  auf  $L \otimes K$  konstruieren, und zwar durch

$$(\nabla_L + \nabla_K)(s_L \otimes s_K) = s_L \otimes \nabla_K(s_K) + \nabla_L(s_L) \otimes s_K \quad (47)$$

für beliebige Schnitte  $s_L : U \rightarrow L$  bzw.  $s_K : U \rightarrow K$ . Dabei wird ausgenutzt, dass das Tensorprodukt eines Schnittes  $s_L$  mit einer  $K$ -wertigen Einsform  $\nabla_K(s_K)$  eine Einsform mit Werten in  $L \otimes K$  ist, und umgekehrt.



- $\beta$ ) Dann hatten wir das Zurückziehen von Geradenbündeln definiert, dazu sei wieder  $f : X \rightarrow M$  eine stetige Abbildung und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf dem hermiteschen Geradenbündel  $L \rightarrow M$ . Dann wird ein Zusammenhang  $f^*\nabla$  auf  $f^{-1}L$  bestimmt durch  $(f^*\nabla)(f^*s) = f^*(\nabla s)$  für jeden Schnitt  $s : U \rightarrow L$ .
- $\gamma$ ) Auf dem zu einem hermiteschen Geradenbündel  $L$  dualen Geradenbündel  $L^*$  wird durch einen Zusammenhang  $\nabla$  auf  $L$  ein Zusammenhang  $\nabla^*$  dadurch bestimmt, dass der Isomorphismus  $L^* \otimes L \rightarrow \mathbb{C}$  von hermiteschen Geradenbündeln auch ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang ist.

Wir können uns nun auch auf der Menge der hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang die Isomorphieklassen ansehen. Das Tensorprodukt von Geradenbündeln, zusammen mit der in  $\alpha$ ) festgelegten Addition von Zusammenhängen definiert wieder eine Gruppenstruktur auf dieser Menge. Das neutrale Element ist die Isomorphieklasse der trivialen hermiteschen Geradenbündel mit trivialem Zusammenhang. Die Definition des dualen Zusammenhangs  $\nabla^*$  in  $\gamma$ ) gewährleistet gerade die Existenz von Inversen.

Bevor wir im nächsten Abschnitt die hermiteschen Geradenbündel mit Zusammenhang klassifizieren, kommen wir jetzt zum Begriff der Krümmung eines Zusammenhangs, die in der physikalischen Anwendung der Feldstärke entsprechen wird. Die Krümmung ist eine geschlossene Zweiform auf  $M$ , die wir zunächst lokal konstruieren.

Dazu nehmen wir wieder eine offene Überdeckung, die Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow L^+$  gestattet. Wir zerlegen  $\nabla s_i$  in ein Tensorprodukt aus einer Einsform  $A_i \in \Omega^1(U_i)$  und dem Schnitt selbst,  $\nabla s_i = \frac{1}{i} A_i \otimes s_i$ . Die so gewonnenen Einsformen nennen wir lokale Zusammenhangsformen. Auf dem Schnitt zweier Teilmengen  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  haben wir die beiden lokalen Zusammenhangsformen  $A_i, A_j \in \Omega^1(U_i \cap U_j)$ . Wir involvieren die Übergangsfunktionen  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  mit  $s_i = g_{ij} \cdot s_j$  und berechnen unter Verwendung der Regel (iii) für Zusammenhänge

$$\nabla s_i = \nabla (g_{ij} \cdot s_j) = g_{ij} \cdot \nabla s_j + dg_{ij} \otimes s_j = iA_j \otimes s_i + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \otimes s_i.$$

Zusammen mit der definierenden Gleichung  $\nabla s_i = \frac{1}{i} A_i \otimes s_i$  und der uns schon bekannten Notation  $d\log(g)_{ij} = \frac{1}{i} g_{ij}^{-1} dg_{ij}$  ergibt sich

$$A_j - A_i - d\log(g)_{ij} = 0. \quad (48)$$

Da bei Anwendung der äußeren Ableitung auf diese Gleichung der Term  $d\log(g)$  verschwindet, haben wir  $\delta(dA)_{ij} = dA_j - dA_i = 0$ , es wird also eine globale Zweiform  $K(\nabla) \in \Omega^2(M)$  definiert mit  $r(K(\nabla)) = dA$ . Sie heißt die Krümmung des Zusammenhangs  $\nabla$ . Ihre Definition ist unabhängig von allen Wahlen, da Gleichung (48) ja gerade besagt, dass  $dA_j = dA_i$  ist für völlig beliebige Untermengen  $U_i, U_j$  und Schnitte  $s_i, s_j$ .

Einen Zusammenhang  $\nabla$  mit Krümmung  $K(\nabla) = 0$  nennen wir flach. Die Krümmung des Zusammenhangs  $\nabla + \alpha$  für eine Einsform  $\alpha \in \Omega^1(M)$  ist  $K(\nabla + \alpha) = K(\nabla) + d\alpha$ .

Eine Verbindung zwischen der Krümmung eines Zusammenhangs und der Chern-Klasse des zugrundeliegenden Geradenbündels wird festgestellt in dem folgenden

SATZ 3.2E (Weil, Kostant). *In einem hermiteschen Geradenbündel  $L \rightarrow M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  definiert die Krümmung  $K(\nabla)$  eine integrale Kohomologiekategorie, deren Urbild unter dem Homomorphismus  $\iota_{\mathbb{Z}} : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{dR}^2(M)$  gerade die Chern-Klasse  $ch(L)$  des Geradenbündels ist. Es gelten die folgenden Rechenregeln:*

- (1) *Isomorphe hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang haben dieselbe Krümmung.*
- (2) *Die Krümmung des Zusammenhangs  $\nabla_1 + \nabla_2$  auf dem Tensorprodukt zweier hermitescher Geradenbündel mit Zusammenhängen  $\nabla_1$  bzw.  $\nabla_2$  ist die Summe der Krümmungen von  $\nabla_1$  und  $\nabla_2$ .*
- (3) *Die Krümmung des dualen Zusammenhangs  $\nabla^*$  ist das negative der Krümmung von  $\nabla$ .*
- (4) *Die Krümmung eines mit einer Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zurückgezogenen Geradenbündels  $L \rightarrow N$  mit Zusammenhang  $\nabla$  ist die zurückgezogene Krümmung  $f^*K(\nabla)$ .*

*Beweis.* Der Satz folgt später aus Korollar 3.2H und dem Satz 3.1C.  $\square$

3.2.4 *Klassifikation von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang.* Nachdem hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang durch ihre Chern-Klasse eine charakteristische Klasse in  $H^2(M, \mathbb{Z})$  haben, der Zusammenhang eine Krümmung  $K(\nabla)$  bestimmt, und diese beiden Daten über den letzten Satz zusammenhängen, haben wir schon eine weitreichende Analogie zur Deligne-Hyperkohomologie im Grad 1 festgestellt. Wir versuchen nun, diese Verbindung zu erhärten, und bestimmen eine Deligne-Klasse aus einem gegebenen hermiteschen Geradenbündel  $L$  mit Zusammenhang  $\nabla$ .

Dazu sei wieder  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$  mit Einheitschnitten  $s_i : U_i \rightarrow L^+$  und entsprechenden Übergangsfunktionen  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ . Die Schnitte bestimmen lokale Zusammenhangsformen  $A_i \in \Omega^1(U_i)$ , und auf Schnitten  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gilt (48). Wir gehen wieder in die Terminologie der Čech-Kohomologie über, haben also einen Kozykel  $g \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  und eine Kokette  $A \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^1)$ . In diesen Ausdrücken lautet (48)  $\delta A - d \log(g) = 0$ . Das ist genau die Kozykelbedingung  $D(g, A) = 0$  an das Element  $(g, A) \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$ , es repräsentiert damit eine Klasse

$$\text{del}(L, \nabla) := [(g, A)] \in \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet).$$

LEMMA 3.2F. *Die aus dem hermiteschen Geradenbündel  $L$  mit Zusammenhang  $\nabla$  konstruierte Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\text{del}(L, \nabla) \in \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$  ist unabhängig von der Wahl der offenen Überdeckung und der Schnitte  $s_i$ .*

*Beweis.* Bezüglich der Unabhängigkeit von der Wahl der Überdeckung argumentieren wir genauso wie zum Beweis von Lemma 3.2B. Bei der Wahl anderer Schnitte  $s'_i : U_i \rightarrow L^+$  hatten wir dort Funktionen  $\lambda_i : U_i \rightarrow U(1)$  gefunden mit  $s'_i = \lambda_i \cdot s_i$  und  $g = g' \cdot \lambda_j \cdot \lambda_i^{-1}$ . Dann wissen wir bereits  $A_i - A'_i = d \log \lambda_i$ , es gilt also

$$(g, A) = D(\lambda) + (g', A'),$$

das heißt,  $(g, A)$  und  $(g', A')$  definieren dieselbe Deligne-Hyperkohomologiekategorie.  $\square$

Wir wollen auch umgekehrt wieder ein hermitesches Geradenbündel mit Zusammenhang aus einem Deligne-Kozykel  $(g, A) \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$  konstruieren. Das hermitesche Geradenbündel mit Schnitten  $s_i : U_i \longrightarrow L^+$  und Übergangsfunktionen  $g_{ij}$  kennen wir bereits. Darauf definieren wir lokale Zusammenhänge  $\nabla_i$  durch  $\nabla_i s_i := \frac{1}{i} A_i \otimes s_i$ . Auf Überschneidungen  $U_i \cap U_j$  mit  $s_i = g_{ij} \cdot s_j$  haben wir

$$\begin{aligned} \nabla_j(s_i) &= \nabla_j(g_{ij} \cdot s_j) = g_{ij} \cdot \frac{1}{i} A_j \otimes s_j + dg_{ij} \otimes s_j \\ &= \frac{1}{i} \left( A_j - d \log(g)_{ij} \right) \otimes s_i = \frac{1}{i} A_i \otimes s_i = \nabla_i(s_i), \end{aligned}$$

die  $\nabla_i$  kleben also zu einem globalen Zusammenhang  $\nabla$  zusammen. Rekonstruieren wir aus diesem Zusammenhang wieder lokale Zusammenhangsformen, so ergeben sich aus der letzten Gleichheit sofort die  $A_i$  zurück.

Zur Klassifikation von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang müssen wir nun noch den Bezug zwischen den Deligne-Hyperkohomologiegruppen und den Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang herstellen. Als Voraussetzung dafür betrachten wir wieder zwei als hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang isomorphe Bündel  $\alpha : L_1 \longrightarrow L_2$  mit Zusammenhängen  $\nabla_1$  und  $\nabla_2$ . Aus den Schnitten  $s_i : U_i \longrightarrow L_1$  mit Übergangsfunktionen  $g_{ij}$  konstruieren wir wieder neue Schnitte  $\alpha \circ s_i : U_i \longrightarrow L_2$  mit denselben Übergangsfunktionen. Es seien  $A_i$  lokale Zusammenhangsformen von  $\nabla_1$  bezüglich der Schnitte  $s_i$ . Die lokalen Zusammenhangsformen im Bündel  $L_2$  werden konstruiert durch

$$\nabla_2(\alpha \circ s_i) = (1 \otimes \alpha) \nabla_1(s_i) = (1 \otimes \alpha) \left( \frac{1}{i} A_i \otimes s_i \right) = \frac{1}{i} A_i \otimes (\alpha \circ s_i)$$

Der Zusammenhang  $\nabla_2$  hat also bezüglich der Schnitte  $\alpha \circ s_i$  dieselben lokalen Zusammenhangsformen. Isomorphe hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang definieren damit denselben Kozykel in der Deligne-Hyperkohomologie.

Dann müssen wir das triviale Bündel mit dem trivialen Zusammenhang untersuchen. Dazu hatten wir bereits lokale Schnitte  $s_i : U_i \longrightarrow U(1)$  gewählt, die den Kozykel  $g = \delta s^{-1}$  bilden. Wir berechnen  $\nabla s_i = ds_i \otimes 1 = s_i^{-1} ds_i \otimes s_i$ , daher ist  $A_i := -\frac{1}{i} s_i^{-1} ds_i = -d \log(s)_i$ . Damit ist die Deligne-Klasse des trivialen Bündels  $[(\delta s^{-1}, -d \log(s))] = [-D(s)] = 0$ .

Auf dem Tensorprodukt  $L_1 \otimes L_2$  zweier hermitescher Geradenbündel mit Zusammenhängen  $\nabla_1$  bzw.  $\nabla_2$  hatten wir den Zusammenhang  $\nabla_1 + \nabla_2$  definiert. Es seien wieder  $s_i : U_i \longrightarrow L_1^+$  und  $s'_i : U_i \longrightarrow L_2^+$  Einheitsschnitte mit lokalen Zusammenhangsformen  $A_i$  und  $A'_i$ , die Schnitte  $s_i \otimes s'_i$  im Bündel  $L_1 \otimes L_2$  definieren. Wir haben sofort

$$(\nabla_1 + \nabla_2)(s_i \otimes s'_i) = s_i \otimes \nabla_2 s'_i + \nabla_1 s_i \otimes s'_i = \frac{1}{i} (A_i + A'_i) \cdot s_i \otimes s'_i$$

Damit ist die Deligne-Klasse des Tensorproduktes die Summe der Deligne-Klassen der Faktoren.

Jetzt können wir schon den entscheidenden Satz formulieren:

SATZ 3.2G (Deligne). *Die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang ist mittels der Deligne-Klasse isomorph zur Deligne-Hyperkohomologiegruppe  $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$ .*

*Beweis.* Wir haben die Zuordnung  $\text{del}(L, \nabla)$  konstruiert und gezeigt, dass sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Seine Surjektivität haben wir durch die Konstruktion eines hermiteschen Geradenbündels mit Zusammenhang zu einer gegebenen Deligne-Klasse gezeigt. Wir müssen noch zeigen, dass sie injektiv ist, und nehmen ein Bündel  $L$  mit Zusammenhang  $\nabla$  an, so dass  $\text{del}(L, \nabla) = [(g, A)] = 0$  ist. Es gibt also ein  $\lambda \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{U}(1))$  mit  $D(\lambda) = (\delta\lambda, \text{dlog}(\lambda)) = (g, A)$ . Wir wissen bereits, dass  $L$  ein triviales Bündel ist und können daher einen Isomorphismus  $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow L$  von hermiteschen Geradenbündeln über  $M$  wählen. Um zu zeigen, dass  $\alpha$  auch ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang ist, müssen wir die Bedingung (46) überprüfen. Dazu wählen wir die Einheitschnitte  $\lambda_i : U_i \rightarrow U(1)$  im trivialen Bündel und bekommen Schnitte  $\alpha \circ \lambda_i : U_i \rightarrow L^+$  in unserem Bündel  $L$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha \circ \lambda_i) &= \lambda_i^{-1} \text{d}\lambda_i \otimes (\alpha \circ \lambda_i) = \text{d}\lambda_i \otimes (\alpha \circ 1) \\ &= (1 \otimes \alpha)(\text{d}\lambda_i \otimes 1) = (1 \otimes \alpha) \nabla^{\text{tr}} \lambda_i, \end{aligned}$$

also ist  $\alpha$  verträglich mit den Zusammenhängen  $\nabla$  auf  $L$  und  $\nabla^{\text{tr}}$  auf  $\mathbb{C}$ .  $\square$

KOROLLAR 3.2H. *Aus den Definitionen folgen unmittelbar die beiden Verbindungen von geometrischen und kohomologischen Daten*

$$\text{ch}(L) = \text{char}(\text{del}(L, \nabla)) \quad \text{und} \quad K(\nabla) = \text{curv}(\text{del}(L, \nabla)).$$

3.2.5 *Holonomie von Geradenbündeln.* Da jedes hermitesche Geradenbündel  $L$  über  $M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  eine Deligne-Klasse definiert, und jede Deligne-Klasse einen wohldefinierten Begriff von Holonomie mit sich trägt, folgt, dass wir für ein solches Bündel die Holonomie

$$\text{hol}(L, \nabla, \phi) := \text{hol}(\text{del}(L, \nabla), \phi)$$

um geschlossene Kurven  $\phi : S^1 \rightarrow M$  definiert haben. In dieser Definition ist unmittelbar klar, dass die Holonomie eines hermiteschen Geradenbündels mit Zusammenhang nur von der durch  $L$  und  $\nabla$  bestimmten Isomorphieklasse abhängt.

Eine  $U(1)$ -Eichtheorie wird durch ein hermitesches Geradenbündel  $L$  mit Zusammenhang  $\nabla$  definiert, und die Amplitude im Pfadintegral eines Teilchens auf einer geschlossenen Trajektorie  $\phi : S^1 \rightarrow M$  setzen wir wie angekündigt auf

$$\exp(i S[\phi]) := \text{hol}(L, \nabla, \phi). \quad (49)$$

Sofort können wir unsere beiden Spezialfälle nachprüfen, nämlich zuerst den Fall, dass ein globales Eichpotential  $A$  existiert mit  $F = \text{d}A$ . Dann liegt der am Ende von Abschnitt 3.1.5 behandelte Fall (42) einer trivialen Deligne-Klasse  $\text{del}(L, \nabla)$  vor und wir haben

$$\text{hol}(L, \nabla, \phi) = \exp\left(i e \int_{S^1} \phi^* A\right), \quad (50)$$

also genau den Term, mit dem wir für diesen trivialen Fall bei (2) angefangen haben. Gehen wir zu einer Kreisscheibe  $D$  über und wählen eine Fortsetzung  $\tilde{\phi} : D \rightarrow M$  der Teilchentrajektorie, so haben wir hier gemäß (43), und wie in (3) angekündigt,

$$\text{hol}(L, \nabla, \phi) = \exp \left( i e \int_D \tilde{\phi}^* F \right).$$

Jetzt wollen wir uns noch ansehen, was der Holonomieterm (49) lokal bedeutet. Dazu bietet sich eine Rechnung im Čech-Deligne-Doppelkomplex an, der ja gerade bezüglich einer Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  definiert war. Diese wählen wir so fein, dass Schnitte in das Geradenbündel existieren, und wir einen Deligne-Kozykel  $(g, eA) \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$  betrachten können, der die Deligne-Hyperkohomologieklasse  $\text{del}(L, \nabla)$  repräsentiert.

Dann teilen wir die Teilchentrajektorie  $\phi : S^1 \rightarrow M$  in so kleine Stücke  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$  auf, dass jedes Stück  $\phi(s_\alpha)$  vollständig in einer der Teilmengen  $U_i$  enthalten ist, und wählen für jedes  $\alpha \in A$  einen Index  $i(\alpha)$  mit  $\phi(s_\alpha) \subseteq U_{i(\alpha)}$ . Für die Punkte  $p \in S^1$ , an denen zwei Stücke aufeinanderstoßen, wählen wir ebenfalls einen Index  $i(p)$  mit  $\phi(p) \in U_{i(p)}$ .

Dann lautet die Holonomieformel (41)

$$\text{hol}(L, \nabla, \phi) = \exp i \sum_{\alpha \in A} \int_{s_\alpha} \varrho,$$

wobei die Zweiform  $\varrho \in \Omega^2(\Sigma)$  so gewählt ist, dass die Klassen  $\text{tr}(\varrho)$  und  $\phi^*[(g, eA)]$  gleich sind. Das bedeutet, dass es ein Element  $f \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(1)_D^\bullet)$  gibt, so dass

$$\phi^*(g, eA) + \mathbf{D}(f) = (1, r(\varrho)) \quad (51)$$

ist. Wir entnehmen in der zweiten Komponente

$$\varrho|_{s_\alpha} = r(\varrho)_{i(\alpha)} = e \cdot \phi^* A_{i(\alpha)} + \text{dlog}(f)_{i(\alpha)}.$$

Unter Verwendung des Stokes'schen Satzes ist dann

$$\exp i \int_{s_\alpha} \text{dlog}(f)_{i(\alpha)} = \prod_{p \in \partial s_\alpha} f_{i(\alpha)}^{\varepsilon(\alpha, p)},$$

wobei  $\varepsilon(\alpha, p) \in \{\pm 1\}$  positiv ist, wenn  $p$  Endpunkt von  $s_\alpha$  bezüglich der Durchlaufrichtung ist und negativ, wenn  $p$  Anfangspunkt ist.

Damit haben wir den Holonomieterm umgeformt zu

$$\exp i \sum_{\alpha \in A} \int_{s_\alpha} \varrho = \prod_{\alpha \in A} \exp \left( i e \int_{s_\alpha} \phi^* A_{i(\alpha)} \right) \cdot \prod_{p \in \partial s_\alpha} f_{i(\alpha)}^{\varepsilon(\alpha, p)}.$$

Zuletzt verwenden wir noch die erste Komponente von (51), aus dieser entnehmen wir nämlich  $f_i = \phi^* g_{ij}^{-1} \cdot f_j$ . Das ergibt das Produkt

$$\prod_{a \in A} \prod_{p \in \partial s_\alpha} f_{i(\alpha)}^{\varepsilon(\alpha,p)} = \prod_{a \in A} \prod_{p \in \partial s_\alpha} \phi^* g_{i(\alpha),i(p)}^{-\varepsilon(\alpha,p)} \cdot f_{i(p)}^{\varepsilon(\alpha,p)}.$$

In diesem Produkt tritt für jedes  $\alpha \in A$  jeder Punkt  $p \in \partial s_\alpha$  genau zweimal auf, nämlich einmal als Endpunkt eines Stückes  $s_\alpha$ , und einmal als Anfangspunkt des anschließenden Stückes  $s_\beta$ . Die Terme  $f_{i(p)}^{\varepsilon(\alpha,p)}$  multiplizieren sich also für jedes  $\alpha$  zu 1, nachdem  $\varepsilon(\alpha, p) = -\varepsilon(\beta, p)$  ist. Es verbleibt die folgende Formel,

$$\text{hol}(L, \nabla, \phi) = \prod_{a \in A} \exp\left(\text{ie} \int_{s_\alpha} \phi^* A_{i(\alpha)}\right) \cdot \prod_{p \in \partial s_\alpha} \phi^* g_{i(\alpha),i(p)}^{-\varepsilon(\alpha,p)}, \quad (52)$$

die nur noch von den gegebenen Übergangsfunktionen  $g_{ij}$  und den lokalen Zusammenhangsformen  $A_{i(\alpha)}$  abhängt.

Wenn also kein global definiertes Eichpotential  $A$  existiert, so dass wir den Term (50) nicht verwenden können, erzeugt die Holonomie des Geradenbündels  $L$  mit Zusammenhang  $\nabla$  in (52) lokale Eichpotentiale  $A_i$ , und liefert zusätzlich die Daten  $g_{ij}$  für Eichtransformationen  $\Lambda_{ij} := \log(g_{ij})$  zwischen den lokalen Eichpotentialen  $A_i$  und  $A_j$  auf einem Überlapp ihrer Definitionsbereiche, nämlich (48)  $A_i \mapsto A_j := A_i + d\Lambda_{ij}$ .

An dem Ausdruck (52) sieht man außerdem durch Vergleich mit zum Beispiel Lemma 6.1.2 in [Bry], dass die hier über die Deligne-Hyperkohomologie definierte Holonomie von Geradenbündeln mit der normalerweise über einen Paralleltransport entlang der Kurve  $\phi$  definierten Holonomie übereinstimmt. Wir haben in dieser Arbeit den Zugang über die Deligne-Hyperkohomologie gewählt, da so die Analogie zu den noch zu behandelnden Gerben besser sichtbar ist.

**3.3 Gerben mit Zusammenhang und Krümmung.** Wir haben bisher eine Kohomologietheorie, die Deligne-Hyperkohomologietheorie  $\check{H}^n(M, \underline{\mathbb{Z}}(n)_D^\bullet)$ , kennengelernt, und geometrische Objekte, nämlich hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang, deren Isomorphieklassen durch die Kohomologiegruppen im Grad 1 klassifiziert werden. Eine Deligne-Klasse vom Grad  $k$  konnte eine Holonomie um eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit messen, und im Grad 1 eignete sich diese gut dazu, die Amplitude der Kopplung eines punktförmigen Teilchen mit eindimensionaler Weltlinie an ein  $U(1)$ -Eichfeld anzugeben.

Wir gehen nun zu eindimensionalen Strings mit zweidimensionaler Weltfläche über, und vermuten, dass sich die Amplitude der Kopplung eines solchen Strings an ein Hintergrundfeld durch die Holonomie einer Deligne-Klasse im Grad 2 beschreiben lässt. Deshalb fragten wir in der Einleitung nach geometrischen Objekten, die in irgendeiner Weise durch  $\check{H}^2(M, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  klassifiziert werden. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass es sich hierbei um Gerben mit Zusammenhang und Krümmung handelt.

Von rein mathematischem Interesse ist die Frage nach geometrischen Objekten, die durch die Deligne-Kohomologietheorie in beliebigen Graden  $k$  klassifiziert werden. Allgemein nennen wir solche Objekte  $k$ -Gerben, so sind also hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang Eins-Gerben, und die Gerben in unserem Sinne mit Zusammenhang und Krümmung sind Zwei-Gerben. Null-Gerben wären Objekte, die durch Deligne-Hyperkohomologie im Grad Null klassifiziert werden; es ist aber leicht einzusehen, dass  $\check{H}^0(M, \underline{\mathbb{Z}}(0)_D^\bullet) = \check{H}^0(M, \underline{U}(1))$  ist, solche Objekte sind also nicht anderes als  $U(1)$ -wertige Funktionen auf  $M$ .

**3.3.1 Gerben.** Die Entstehungsgeschichte von Gerben beginnt Anfang der 70er Jahre dieses Jahrhunderts, als J. Giraud nicht-abelsche Kohomologie untersuchte [Gi]. In Brylinskis Arbeiten Anfang der 90er Jahre und in seinem Buch [Bry] wurde die Idee von Gerben wieder aufgenommen. Demnach sind Gerben Faserbündel, deren Fasern Gruppoide, also eine bestimmte Art von Kategorien sind. 1994 hat Michael K. Murray Bündelgerben eingeführt [Mu], und gezeigt, dass man aus jeder Bündelgerbe eine Gerbe im Sinne Girauds und Brylinskis konstruieren kann. Bündelgerben sind also etwas speziellere Gerben, die aber den Vorteil besserer Zugänglichkeit haben. Für unsere Zwecke sind Bündelgerben völlig ausreichend.

Wir werden uns außerdem auf die Arbeiten von K. Gawędzki und N. Reis [GaRei] und von E. Meinrenken [Mei] beziehen, in denen ebenfalls Bündelgerben verwendet werden. Dabei findet man durchaus unterschiedliche Definitionen, von Bündelgerben selbst wie auch von Begriffen wie Isomorphie und stabiler Isomorphie von Gerben.

Die in dieser Arbeit angegebenen Definitionen orientieren sich nicht ausschließlich an einer dieser Arbeiten, wir versuchen vielmehr, die für uns sinnvollsten Definitionen zu treffen.

Wir beginnen wieder mit einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Nachdem im Zusammenhang mit zurückgezogenen Bündeln schon mehrmals der Begriff des Faserproduktes augetreten ist, geben wir hier nochmal die allgemeine Definition an. Das Faserprodukt zweier Mengen  $Y$  und  $\tilde{Y}$  mit Abbildungen  $\pi : Y \rightarrow M$  und  $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \rightarrow M$  ist die Untermenge  $Y \times_M \tilde{Y}$  von  $Y \times \tilde{Y}$ , die aus Paaren von Punkten mit gleichem Basispunkt besteht, also

$$Y \times_M \tilde{Y} := \left\{ (y, \tilde{y}) \in Y \times \tilde{Y} \mid \pi(y) = \tilde{\pi}(\tilde{y}) \right\}.$$

Mehrfache Faserprodukte von  $Y$  mit sich selbst bezeichnen wir mit  $Y_M^{[k]}$ .

Außerdem hatten wir schon die Abbildung  $\partial_i$  eingeführt, die aus einem Tupel von Elementen das  $i$ -te wegläßt, wie zum Beispiel  $\partial_i : Y_M^{[3]} \rightarrow Y_M^{[2]}$  für  $i = 1, 2, 3$  im Punkt 3) der anschließenden

**DEFINITION 3.3A.** Eine hermitesche Bündelgerbe  $\mathcal{G}$  über  $M$  ist ein Tupel  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$ , bestehend aus

- 1) einem differenzierbaren Bündel  $\pi : Y \rightarrow M$ , welches lokale Schnitte erlaubt,
- 2) einem hermiteschen Geradenbündel  $p : L \rightarrow Y_M^{[2]}$ , und

3) *einem assoziativen Isomorphismus*

$$\mu : \partial_3^{-1}L \otimes \partial_1^{-1}L \longrightarrow \partial_2^{-1}L$$

von hermiteschen Geradenbündeln über  $Y_M^{[3]}$ .

Von jetzt an werden wir uns aus Bequemlichkeit mit dem Wort *Gerbe* auf diese Definition beziehen. Weiter nennen wir  $Y$  den Bündelraum und  $\mu$  die Gruppoidstruktur auf  $L$ .

In Murrays ursprünglicher Definition wird die Gruppoidstruktur  $\mu$  lokal angegeben. Dazu nimmt man einen Punkt  $(x, y, z) \in Y_M^{[3]}$ , und wertet  $\mu$  faserweise aus. Dann ergibt sich ein Isomorphismus

$$\mu|_{(x,y,z)} : L|_{(x,y)} \otimes L|_{(y,z)} \longrightarrow L|_{(x,z)}$$

von Vektorräumen. Diese Definition benötigt allerdings die Forderung einer Art Differenzierbarkeit bezüglich  $(x, y, z)$ , die bei unserer, globalen Definition automatisch erfüllt ist.

Wir veranschaulichen Gerben in einem Diagramm der Art

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & & \downarrow p \\ Y & \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_1} \\ \xrightarrow{\partial_2} \end{array} & Y_M^{[2]} \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

Um zu zeigen, dass es Gerben gibt, kann man sich zum Beispiel ein differenzierbares Faserbündel  $\pi : Y \longrightarrow M$  vorgeben, und dann aus jedem hermiteschen Geradenbündel  $K \longrightarrow Y$  eine Gerbe  $t\left(\frac{K}{Y}\right)$  konstruieren. Dazu bilden wir mit den Abbildungen  $\partial_1, \partial_2 : Y_M^{[2]} \longrightarrow Y$  das Geradenbündel

$$t(K) := \partial_2^{-1}K \otimes \partial_1^{-1}K^*$$

über  $Y_M^{[2]}$ . Im Diagramm haben wir

$$\begin{array}{ccc} K, K^* & & t(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_1} \\ \xrightarrow{\partial_2} \end{array} & Y_M^{[2]} \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$



Dann müssen wir eine Gruppoidstruktur  $\mu$  konstruieren, also einen Isomorphismus von Geradenbündeln

$$\mu : \partial_3^{-1}t(K) \otimes \partial_1^{-1}t(K) \longrightarrow \partial_2^{-1}t(K).$$

Der Definitionsbereich vereinfacht sich mit den für Abbildungen  $Y_M^{[3]} \longrightarrow Y$  gültigen Identitäten  $\partial_i \circ \partial_3 = \partial_2 \circ \partial_i$  und  $\partial_1 \circ \partial_1 = \partial_1 \circ \partial_2$  zu

$$\partial_2^{-1}\partial_2^{-1}K \otimes \partial_1^{-1}\partial_2^{-1}(K^* \otimes K) \otimes \partial_2^{-1}\partial_1^{-1}K^*.$$

Wir setzen

$$\mu := 1 \otimes \text{kan} \otimes 1,$$

wobei  $\text{kan} : K^* \otimes K \longrightarrow \mathbb{C}$  die kanonische Paarung von dualen Vektorräumen ist. Dann ist

$$\mu(\partial_3^{-1}t(K) \otimes \partial_1^{-1}t(K)) = \partial_2^{-1}(\partial_2^{-1}K \otimes \partial_1^{-1}K^*) = \partial_2^{-1}t(K),$$

so dass wir eine Gerbe  $t\left(\frac{K}{Y}\right) := (Y, t(K), \mu)$  über  $M$  definiert haben.

In diesem Abschnitt werden wir einige grundlegende Operationen mit Gerben einführen, und beginnen mit dem Zurückziehen von Gerben. Dabei unterscheiden wir zwischen dem Zurückziehen mit einer Abbildung  $f : X \longrightarrow M$  in den Basisraum, was eine Gerbe über  $M$  zu einer Gerbe über  $X$  zurückziehen würde, und einem Zurückziehen, das nicht am Basisraum  $M$ , sondern am Bündelraum  $Y$  von  $\mathcal{G}$  ansetzt. Wir beginnen mit dieser zweiten Möglichkeit, die wir inneres Zurückziehen nennen. Es sei also  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  eine Gerbe über  $M$  mit Bündelraum  $\pi : Y \longrightarrow M$ . Dazu nehmen wir ein weiteres differenzierbares Faserbündel  $\tilde{\pi} : Z \longrightarrow M$  und eine stetige, faser-treue Abbildung  $\varphi : Z \longrightarrow Y$ , sie erfüllt also  $\pi \circ \varphi = \tilde{\pi}$ . Durch  $\varphi$  erhalten wir komponentenweise eine Abbildung  $\varphi^2 : Z_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[2]}$ , mit der wir  $L$  zu einem hermiteschen Geradenbündel  $L_\varphi := (\varphi^2)^{-1}L$  über  $Z_M^{[2]}$  zurückziehen.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & L \\ & & & & \downarrow \\ L_\varphi & & & & L \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ Z_M^{[2]} & \xrightarrow{\quad} & Z & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & Y & \xleftarrow{\quad} & Y_M^{[2]} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & \xlongequal{\quad} & M & & \end{array}$$

$\varphi^2$  (curved arrow from  $Z_M^{[2]}$  to  $Y_M^{[2]}$ )

Zur Definition einer Gruppoidstruktur auf  $L_\varphi$  verwenden wir die Identität von Abbildungen

$$\partial_i \circ \varphi^3 = \varphi^2 \circ \partial_i : Z_M^{[3]} \longrightarrow Y_M^{[2]}, \quad (53)$$

und, dass die mit  $\varphi^3$  als Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln zurückgezogene Gruppoidstruktur

$$\mu_\varphi := (\varphi^3)^* \mu : (\varphi^3)^{-1} \partial_3^{-1}L \otimes (\varphi^3)^{-1} \partial_1^{-1}L \longrightarrow (\varphi^3)^{-1} \partial_2^{-1}L$$

dadurch zu einer Gruppoidstruktur

$$\mu_\varphi : \partial_3^{-1}L_\varphi \otimes \partial_1^{-1}L_\varphi \longrightarrow \partial_2^{-1}L_\varphi$$

auf  $L_f$  wird. Damit ist  $i_\varphi(\mathcal{G}) := (Z, L_\varphi, \mu_\varphi)$  die durch inneres Zurückziehen mit  $\varphi$  erzeugte Gerbe über  $M$ .

Natürlich wollen wir Gerben auch auf andere Basisräume zurückziehen. Dazu sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $f : X \longrightarrow M$  eine stetige Abbildung. Zunächst ziehen wir das Faserbündel  $\pi : Y \longrightarrow M$  zurück, und erhalten das Faserbündel  $f^{-1}Y = X \times_M Y$ . Auf ihm haben wir die Abbildungen  $\varphi := \partial_1 : f^{-1}Y \longrightarrow Y$  und  $\tilde{\pi} = f \circ \partial_2 : f^{-1}Y \longrightarrow M$ . Dabei ist  $\varphi$  als Abbildung des Faserbündels  $\tilde{\pi} : f^{-1}Y \longrightarrow M$  nach  $Y$  fasertreu, nachdem  $f^{-1}Y$  gerade so definiert ist. Damit können wir das innere Zurückziehen von Gerben verwenden, und erhalten die Gerbe  $f^*\mathcal{G} := (f^{-1}Y, L_\varphi, \mu_\varphi)$  über  $X$ .

Mit dem folgenden, rein technischen Lemma machen wir uns die Gruppoidstruktur auf dem Geradenbündel einer Gerbe nutzbar.

LEMMA 3.3B. *Es sei  $L \longrightarrow Y_M^{[2]}$  ein hermitesches Geradenbündel über dem zweifachen Faserprodukt von  $Y$  mit sich selbst und  $\mu$  eine Gruppoidstruktur auf  $L$ . Die Abbildung*

$$\kappa_k : Y_M^{[k]} \longrightarrow Y_M^{[k]} : (y_1, \dots, y_k) \longmapsto (y_k, \dots, y_1)$$

*kehre die Reihenfolge der Einträge in einem  $k$ -Tupel um. Dann bestimmt die Gruppoidstruktur  $\mu$  einen Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln  $\alpha : \kappa_2^{-1}L \longrightarrow L^*$ .*

*Beweis.* Wir definieren die Hilfsabbildungen

$$\begin{aligned} h_1 & : Y_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[3]} : (x, y) \longmapsto (x, y, y) \\ h_2 & : Y_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[3]} : (x, y) \longmapsto (y, x, y) \end{aligned}$$

und ziehen mit ihnen die Gruppoidstruktur als Isomorphismus von Geradenbündeln zurück. Dann erhält man zum einen mithilfe der Identität  $\partial_3 \circ h_1 = \partial_2 \circ h_1 = 1$  den Isomorphismus  $h_1^*\mu : L \otimes h_1^{-1}\partial_1^{-1}L \longrightarrow L$ , diesem wiederum entnehmen wir den Isomorphismus

$$t : h_1^{-1}\partial_1^{-1}L \longrightarrow L.$$

Im Bild von  $\partial_1 \circ h_1$  liegen die Elemente der Form  $(x, x) \in Y_M^{[2]}$ , damit bestimmt die Gruppoidstruktur kanonische Vektorraumisomorphismen der Fasern  $L|_{(x,x)} = \mathbb{C}$ . Zum zweiten erhält man über die mit  $h_2$  zurückgezogene Gruppoidstruktur  $h_2^*\mu$  mit  $\partial_2 \circ h_2 = \partial_1 \circ h_1$ , sowie den Feststellungen  $\partial_3 \circ h_2 = \kappa_2$  und  $\partial_1 \circ h_2 = 1$  einen zweiten Isomorphismus

$$\beta = t \circ h_2^*\mu : \kappa_2^{-1}L \otimes L \longrightarrow L.$$

Dieser bestimmt den Isomorphismus der Bündel  $\kappa_2^{-1}L$  und  $L^*$ . □

Die Eigenschaften der Abbildung  $\kappa_k$  können wir zur Definition einer dualen Gerbe verwenden. Zu einer gegebenen Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  nehmen wir dazu denselben Bündelraum  $Y$ , und das duale hermitesche Geradenbündel  $L^* \rightarrow Y_M^{[2]}$ . Die Gruppoidstruktur  $\mu$  ziehen wir als Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln über  $Y_M^{[3]}$  mit  $\kappa_3$  zurück, und erhalten einen Isomorphismus

$$\kappa_3^* \mu : \kappa_3^{-1} \partial_3^{-1} L \otimes \kappa_3^{-1} \partial_1^{-1} L \rightarrow \kappa_3^{-1} \partial_2^{-1} L.$$

Man sieht leicht die Vertauschungsregeln

$$\partial_3 \circ \kappa_3 = \kappa_2 \circ \partial_1, \quad \partial_1 \circ \kappa_3 = \kappa_2 \circ \partial_3 \quad \text{und} \quad \partial_2 \circ \kappa_3 = \kappa_2 \circ \partial_2$$

ein, mit denen wir über die Verkettung mit der (für endlich dimensionale Vektorräume kanonischen) Austauschabbildung  $ex : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  für Tensorprodukte die gewünschte Gruppoidstruktur

$$\mu^* := \kappa_3^* \mu \circ ex : \partial_3^{-1} L^* \otimes \partial_1^{-1} L^* \rightarrow \partial_2^{-1} L^*$$

auf der dualen Gerbe  $\mathcal{G}^* = (Y, L^*, \mu^*)$  erhalten.

Zum Vergleich mehrerer Gerben benötigen wir wieder den Begriff der Isomorphie. Und zwar nennen wir zwei Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  isomorph, wenn die Bündelräume übereinstimmen und wenn es einen Isomorphismus  $\alpha : L \rightarrow K$  von hermiteschen Geradenbündeln über  $Y_M^{[2]} = Z_M^{[2]}$  gibt, der mit den Gruppoidstrukturen  $\mu$  und  $\nu$  verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\nu \circ (\partial_3^* \alpha \otimes \partial_1^* \alpha) = \partial_2^* \alpha \circ \mu \tag{54}$$

als Isomorphismen  $\partial_3^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} L \rightarrow \partial_2^{-1} K$  von hermiteschen Geradenbündeln gleich sind.

Analog zu trivialen Geradenbündeln nennen wir eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  trivial, wenn es ein hermitesches Geradenbündel  $K \rightarrow Y$  gibt, so dass die Gerben  $\mathcal{G}$  und  $t \left( \frac{K}{Y} \right)$  isomorph sind. In diesem Fall nennen wir das Geradenbündel  $K \rightarrow M$  eine Trivialisierung der Gerbe  $\mathcal{G}$ . Trivialisierungen von Gerben sind nicht eindeutig durch die Gerbe bestimmt, wie das folgende Lemma zeigt.

**LEMMA 3.3C.** *Die hermiteschen Geradenbündel  $J \rightarrow M$  über  $M$  operieren transitiv auf den möglichen Trivialisierungen einer festen Gerbe  $\mathcal{G}$ .*

*Beweis.* Wir definieren zunächst die Operation  $*$  der hermiteschen Geradenbündel über  $M$  auf den Trivialisierungen. Dazu sei  $J$  ein solches Bündel und  $K$  eine Trivialisierung von  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$ . Wir setzen  $J * K := K \otimes \pi^{-1} J$ , wobei  $\pi : Y \rightarrow M$  die Projektion des Bündelraumes von  $\mathcal{G}$  ist. Das ergibt ein hermitesches Geradenbündel über  $Y$ . Nach Definition ist

$$t(J * K) = \partial_2^{-1} K \otimes (\pi \circ \partial_2)^{-1} J \otimes \partial_1^{-1} K^* \otimes (\pi \circ \partial_1)^{-1} J^*,$$

da aber  $\pi \circ \partial_2 = \pi \circ \partial_1$  ist, wird über die kanonische Paarung kan ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln  $t(J * K) \longrightarrow t(K)$  bestimmt, der automatisch mit den Gruppoidstrukturen der trivialen Gerben verträglich ist. Damit sind die Gerben  $t\left(\frac{K}{Y}\right)$  und  $t\left(\frac{J * K}{Y}\right)$  isomorph, und  $J * K \longrightarrow Y$  ist eine Trivialisierung von  $\mathcal{G}$ . Es seien nun  $K_1$  und  $K_2$  zwei Trivialisierungen von  $\mathcal{G}$ . Das bedeutet, dass die hermiteschen Geradenbündel  $t(K_1)$  und  $t(K_2)$  über  $Y_M^{[2]}$  jeweils isomorph zu  $L$  sind, also auch isomorph untereinander. Es gibt also einen Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln

$$\alpha : \partial_2^{-1} K_1 \otimes \partial_1^{-1} K_1^* \longrightarrow \partial_2^{-1} K_2 \otimes \partial_1^{-1} K_2^*,$$

aus dem wir durch Umsortieren einen Isomorphismus

$$\tilde{\alpha} : \partial_2^{-1} (K_2^* \otimes K_1) \longrightarrow \partial_1^{-1} (K_2^* \otimes K_1)$$

entnehmen. Das heißt, dass die Fasern des Bündels  $K_2^* \otimes K_1$  über Punkten  $y, y'$  mit  $(y, y') \in Y_M^{[2]}$  mittels  $\tilde{\alpha}$  isomorph sind. Wir können daher ein hermitesches Geradenbündel  $J \longrightarrow M$  konstruieren mit Fasern

$$J|_x := \coprod_{y \in \pi^{-1}(x)} (K_2^* \otimes K_1)|_y / \tilde{\alpha}.$$

Dann ist  $\pi^{-1} J = K_2^* \otimes K_1$ , und die Operation von  $J$  auf die Trivialisierung  $K_2$  ergibt  $J * K_2 = K_2 \otimes K_2^* \otimes K_1 = K_1$ .  $\square$

Weiter würden wir gerne aus zwei gegebenen Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  eine neue Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  konstruieren. Für dieses Tensorprodukt verwenden wir als Bündelraum das Faserprodukt  $Y \times_M Z$  mit den beiden Projektionen  $\partial_2 : Y \times_M Z \longrightarrow Y$  und  $\partial_1 : Y \times_M Z \longrightarrow Z$ . Wir müssen jetzt ein hermitesches Geradenbündel über  $(Y \times_M Z)_M^{[2]}$  konstruieren. Durch komponentenweises Anwenden von  $\partial_2$  und  $\partial_1$  bekommen wir Abbildungen

$$\begin{aligned} \partial_1^2 & : (Y \times_M Z)_M^{[2]} \longrightarrow Z_M^{[2]} \\ \partial_2^2 & : (Y \times_M Z)_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[2]} \end{aligned}$$

und konstruieren damit das hermitesche Geradenbündel

$$L \otimes_M K := (\partial_2^2)^{-1} L \otimes (\partial_1^2)^{-1} K \longrightarrow (Y \times_M Z)_M^{[2]}.$$

Im Diagramm haben wir außen die beiden Gerben, und in der Mitte das Tensorprodukt:

$$\begin{array}{ccccc} L & \longleftarrow & (\partial_2^2)^{-1} L \otimes (\partial_1^2)^{-1} K & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_M^{[2]} & \xleftarrow{\partial_2^2} & (Y \times_M Z)_M^{[2]} & \xrightarrow{\partial_1^2} & Z_M^{[2]} \\ \swarrow & & \downarrow & & \searrow \\ Y & \xleftarrow{\partial_2} & Y \times_M Z & \xrightarrow{\partial_1} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

Die Gruppoidstruktur definieren wir als den Bündelisomorphismus

$$\mu \otimes_M \nu = ((\partial_2^3)^* \mu \otimes (\partial_1^3)^* \nu) \circ (1 \otimes ex \otimes 1).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und erfüllt die gewünschten Eigenschaften, da mit (53) für  $\varphi = \partial_j$  der Definitionsbereich das vierfache Tensorprodukt

$$\begin{aligned} & \partial_3^{-1}(L \otimes_M K) \otimes \partial_1^{-1}(L \otimes_M K) \\ &= (\partial_2^3)^{-1} \partial_3^{-1} L \otimes (\partial_1^3)^{-1} \partial_3^{-1} K \otimes (\partial_2^3)^{-1} \partial_1^{-1} L \otimes (\partial_1^3)^{-1} \partial_1^{-1} K \end{aligned}$$

ist, indem  $1 \otimes \kappa_2 \otimes 1$  die beiden mittleren Faktoren vertauscht. Dann bleibt

$$(\partial_2^3)^{-1} (\partial_3^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} L) \otimes (\partial_1^3)^{-1} (\partial_3^{-1} K \otimes \partial_1^{-1} K),$$

worauf wir links mit  $(\partial_2^3)^* \mu$  und rechts mit  $(\partial_1^3)^* \nu$  wirken. Unter nochmaliger Verwendung von (53) ergibt sich dann

$$(\partial_2^3)^{-1} (\partial_2^{-1} L) \otimes (\partial_1^3)^{-1} (\partial_2^{-1} K) = \partial_2^{-1} (L \otimes_M K),$$

das heißt, wir haben eine Gruppoidstruktur

$$\mu \otimes_M \nu : \partial_3^{-1}(L \otimes_M K) \otimes \partial_1^{-1}(L \otimes_M K) \longrightarrow \partial_2^{-1}(L \otimes_M K)$$

definiert. Damit haben wir das Tensorprodukt

$$\mathcal{G} \otimes \mathcal{H} = (Y \times_M Z, L \otimes_M K, \mu \otimes_M \nu)$$

konstruiert.

An dieser Stelle können wir schon einsehen, dass der Begriff von Isomorphie von Gerben nicht dieselbe Bedeutung hat wie bei Geradenbündeln. Das Tensorprodukt einer Gerbe  $\mathcal{G}$  mit einer trivialen Gerbe  $t \left( \begin{smallmatrix} K \\ Y \end{smallmatrix} \right)$  ergibt nämlich eine Gerbe  $\mathcal{G} \otimes t \left( \begin{smallmatrix} K \\ Y \end{smallmatrix} \right)$ , die im Allgemeinen nicht isomorph zur Gerbe  $\mathcal{G}$  ist, da die Bündelräume von  $\mathcal{G} \otimes t \left( \begin{smallmatrix} K \\ Y \end{smallmatrix} \right)$  und  $\mathcal{G}$  unterschiedlich sind. Insbesondere sind zwei triviale Gerben nicht unbedingt isomorph. Es ist also mit den hier eingeführten Begriffen nicht möglich, auf der Menge der Isomorphieklassen von Gerben eine Gruppenstruktur zu definieren. Dieses Problem wird auch nicht dadurch gelöst, dass man, wie z.B. in [CaJoMu], in der Definition von Isomorphie von Gerben unterschiedliche Bündelräume zuläßt.

Wir müssen den strengen Begriff von Isomorphie von Gerben lockern und zu größeren Äquivalenzklassen übergehen. Bei der Klassifizierung von Vektorbündeln höherer Ränge, wo sich ähnliche Probleme ergeben, geht man zum Begriff der stabilen Isomorphie über. Bei Geradenbündeln ist Isomorphie und stabile Isomorphie dasselbe. Wir lassen uns dadurch zur folgenden Definition motivieren.

**DEFINITION 3.3D.** *Zwei Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  über  $M$  heißen stabil isomorph, wenn die Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$  trivial ist.*

Für zwei stabil isomorphe Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  bedeutet diese Definition, dass es ein hermitesches Geradenbündel  $J \rightarrow Y \times_M Z$  gibt, so dass die Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$  und die triviale Gerbe  $t\left(\frac{J}{Y \times_M Z}\right)$  isomorph sind. Ein solches Geradenbündel nennen wir einen stabilen Isomorphismus von  $\mathcal{G}$  nach  $\mathcal{H}$ .

Wir sehen sofort, dass die oben angesprochenen Probleme durch diese Definition gelöst werden. Zwei triviale Gerben  $t\left(\frac{L}{Y}\right)$  und  $t\left(\frac{J}{Z}\right)$  sind stabil isomorph, wobei das Geradenbündel  $L \otimes J^* \rightarrow Y \times_M Z$  ein stabiler Isomorphismus ist. Eine Gerbe  $\mathcal{G} \otimes t\left(\frac{K}{Y}\right)$  ist stabil isomorph zur Gerbe  $\mathcal{G}$ , wobei  $K \rightarrow Y$  ein stabiler Isomorphismus ist.

Im Vergleich von Isomorphie mit stabiler Isomorphie zeigt sich, dass zwei isomorphe Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  auch stabil isomorph sind. Dazu nehmen wir ihr Tensorprodukt mit  $\mathcal{H}^*$ , danach sind  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$  und  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$  isomorphe Gerben. Ist  $\mathcal{H} = (Y, L, \mu)$ , dann ist der Bündelraum von  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$  gerade  $Y_M^{[2]}$ , und das hermitesche Geradenbündel auf  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$  ist das Bündel  $(\partial_1^2)^{-1} L \otimes (\partial_2^2)^{-1} L^* = t(L)$ . Also sind die Gerben  $t\left(\frac{L}{Y_M^{[2]}}\right)$  und  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ , und damit auch  $t\left(\frac{L}{Y_M^{[2]}}\right)$  und  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$  isomorph, das heißt  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  sind stabil isomorph.

Jetzt zeigen wir noch, dass stabile Isomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gerben über  $M$  definiert.

- a) Reflexivität. Eine Gerbe  $\mathcal{G}$  ist stabil isomorph zu sich selbst, da das Tensorprodukt  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  - wie gerade gesehen - eine triviale Gerbe ist.
- b) Symmetrie. Angenommen, zwei Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  mit Bündelräumen  $Y$  und  $Z$  sind stabil isomorph, und das Geradenbündel  $L \rightarrow Y \times_M Z$  ist ein stabiler Isomorphismus von  $\mathcal{G}$  nach  $\mathcal{H}$ . Dann ist das Bündel  $L^* \rightarrow Z \times_M Y$  ein stabiler Isomorphismus von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathcal{G}$ .
- c) Transitivität. Es seien jeweils die Gerben  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}, \mathcal{I}$  stabil isomorph mit stabilen Isomorphismen  $L \rightarrow X \times_M Y$  und  $K \rightarrow Y \times_M Z$ . Dann ist  $L \otimes K \rightarrow X \times_M Z$  ein stabiler Isomorphismus von  $\mathcal{G}$  nach  $\mathcal{I}$ .

Wir können also von Äquivalenzklassen bezüglich stabiler Isomorphie, oder auch stabilen Isomorphieklassen sprechen. Das Tensorprodukt von Gerben definiert eine Gruppenstruktur auf den stabilen Isomorphieklassen. Das Einselement ist die stabile Isomorphieklasse der trivialen Gerben. Die zu einer stabilen Isomorphieklasse inverse Klasse wird vertreten durch die zu einer Vertretergerbe duale Gerbe.

LEMMA 3.3E (Gawędzki, Reis [GaRei]). *Es seien  $\pi : Y \rightarrow M$  und  $\tilde{\pi} : Z \rightarrow M$  differenzierbare Bündel und  $\varphi : Z \rightarrow Y$  eine fasertreue Abbildung. Jede Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Bündelraum  $Y$  ist stabil isomorph zu der durch inneres Zurückziehen erzeugten Gerbe  $i_\varphi(\mathcal{G})$ .*

*Beweis.* Wir ziehen das Geradenbündel  $L \rightarrow Y_M^{[2]}$  mit der Abbildung  $(\text{id}_Y, \varphi) : Y \times_M Z \rightarrow Y_M^{[2]}$  zurück. In die Wohldefiniertheit dieser Abbildung geht ein, dass  $\varphi$  fasertreu ist. Wir zeigen, dass das zurückgezogene Geradenbündel ein stabiler Isomorphismus ist. Die durch es erzeugte triviale Gerbe hat den Bündelraum  $Y \times_M Z$  und das Geradenbündel

$$t\left((\text{id}_Y \times \varphi)^{-1} L\right) = \partial_2^{-1} (\text{id}_Y, \varphi)^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} (\text{id}_Y, \varphi)^{-1} L^*.$$

Wir konstruieren einen Isomorphismus zwischen diesem Geradenbündel und dem Geradenbündel der Gerbe  $\mathcal{G} \otimes i_\varphi(\mathcal{G})^*$  mit dem Bündelraum

$$L \otimes_M L_\varphi = (\partial_2^2)^{-1} L \otimes (\partial_1^2)^{-1} (\varphi^2)^{-1} L^*$$

durch Verwendung der Gruppoidstrukturen  $\mu$  auf  $L$  und  $\mu^*$  auf  $L^*$ . Wir definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha_4 & : = \partial_4 \circ (\text{id}_Y, \varphi)^2 : (Y \times_M Z)_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[3]} \\ \alpha_1 & : = \partial_1 \circ (\text{id}_Y, \varphi)^2 : (Y \times_M Z)_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[3]} \end{aligned}$$

und stellen die folgenden Identitäten fest:

$$\begin{aligned} \partial_2^2 &= \partial_2 \circ \alpha_4 & \partial_3 \circ \alpha_4 &= (\text{id}_Y, \varphi) \circ \partial_2 \\ \varphi^2 \circ \partial_1^2 &= \partial_2 \circ \alpha_1 & \partial_1 \circ \alpha_1 &= (\text{id}_Y, \varphi) \circ \partial_1 \end{aligned}$$

Außerdem haben wir  $\partial_1 \circ \alpha_4 = \partial_3 \circ \alpha_1$  und damit einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} (\alpha_4^* \mu)^{-1} \otimes (\alpha_1^* \mu^*)^{-1} & : (\partial_2^2)^{-1} L \otimes (\varphi^2 \circ \partial_1^2)^{-1} L^* \longrightarrow \\ & \partial_2^{-1} (\text{id}_Y, \varphi)^{-1} L \otimes \alpha_4^{-1} \partial_1^{-1} (L \otimes L^*) \otimes \partial_1^{-1} (\text{id}_Y, \varphi)^{-1} L^*. \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Isomorphismus mit der kanonischen Identifizierung in der Mitte des Tensorproduktes verketteten, haben wir den gesuchten Isomorphismus

$$(1 \otimes \text{kan} \otimes 1) \left( (\alpha_4^* \mu)^{-1} \otimes (\alpha_1^* \mu^*)^{-1} \right) : L \otimes_M L_\varphi \longrightarrow t \left( (\text{id}_Y \times \varphi)^{-1} L \right)$$

gefunden. Die Gerbe  $\mathcal{G} \otimes i_\varphi(\mathcal{G})^*$  damit trivial, das heißt  $\mathcal{G}$  und  $i_\varphi(\mathcal{G})$  sind stabil isomorph.  $\square$

**3.3.2 Die Dixmier-Douady-Klasse einer Gerbe.** In ähnlicher Weise, wie wir hermiteschen Geradenbündeln charakteristische Klassen zugeordnet haben, wollen wir nun auch Gerben, ähnlich der Chernklasse eines Geradenbündels, eine charakteristische Klasse zuzuordnen, die Dixmier-Douady-Klasse.

Geben wir uns eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  mit Bündelraum  $\pi : Y \longrightarrow M$  vor und wählen von vorneherein eine gute Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  von  $M$ ; das wäre nicht unbedingt nötig, aber wir müssten an eine beliebige offene Überdeckung zusätzliche Bedingungen stellen.

Wir bilden die disjunkte Vereinigung der Teilmengen der Überdeckung,

$$M_{\mathfrak{U}} := \coprod_{i \in I} U_i.$$

Die  $k$ -fachen Faserprodukte dieser Mannigfaltigkeit sind

$$(M_{\mathfrak{U}})_M^{[k]} := \coprod_{i_1, \dots, i_k \in I} U_{i_1 \dots i_k},$$

wobei wir die Schreibweise  $U_{i_1 \dots i_k} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$  benutzen, um zu betonen, dass z.B.  $U_{ij}$  und  $U_{ji}$  unterschiedliche Zusammenhangskomponenten von  $(M_{\mathfrak{U}})_M^{[2]}$  sind. Da  $\mathfrak{U}$  eine gute Überdeckung ist, können wir Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow Y$  wählen, aus denen wir eine Abbildung  $s : M_{\mathfrak{U}} \rightarrow Y : x \in U_i \mapsto s_i(x)$  erhalten. Diese Abbildung ist faser-treu bezüglich der Projektionen nach  $M$  und erlaubt daher das innere Zurückziehen der Gerbe  $\mathcal{G}$ . Wir bekommen eine Gerbe  $i_s(\mathcal{G})$  über  $M$  mit Bündelraum  $M_{\mathfrak{U}}$ , hermiteschem Geradenbündel  $L_s$  und Gruppoidstruktur  $\mu_s$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L_s & \xrightarrow{\quad} & L \\
 & \nearrow \sigma_{ij} & \downarrow & & \downarrow \\
 U_{ij} & \hookrightarrow & (M_{\mathfrak{U}})_M^{[2]} & \xrightarrow{s^2} & Y_M^{[2]} \\
 & & \downarrow & \xrightarrow{s} & \downarrow \\
 & & M & = & M
 \end{array}$$

Da wir eine gute offene Überdeckung gewählt haben, sind die zweifachen Schnittmengen  $U_i \cap U_j$  zusammenziehbar, also sind es auch die Zusammenhangskomponenten von  $M_{\mathfrak{U}}$ . Auf jeder Zusammenhangskomponente können wir damit Einheitsschnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s^+$  wählen. Die Vertauschungsabbildung  $\kappa_2 : (M_{\mathfrak{U}})_M^{[2]} \rightarrow (M_{\mathfrak{U}})_M^{[2]}$  ordnet einem Punkt  $x \in U_i \cap U_j$  in der Komponente  $U_{ij}$  denselben Punkt in  $U_{ji}$  zu. Außerdem ist  $\kappa_2^{-1}L_s = L_s^*$ . An die Schnitte können wir also die Bedingung  $\sigma_{ij}^* = \kappa_2^* \sigma_{ji}$  stellen.

Betrachten wir nun eine dreifache nichtleere Schnittmenge  $U_i \cap U_j \cap U_k$  und die Inklusionen

$$\partial_1 : U_{ijk} \hookrightarrow U_{jk}, \quad \partial_2 : U_{ijk} \hookrightarrow U_{ik} \quad \text{und} \quad \partial_3 : U_{ijk} \hookrightarrow U_{ij}.$$

Mit ihnen ziehen wir die entsprechenden, gewählten Einheitsschnitte zurück zu Schnitten

$$\begin{aligned}
 \partial_1^* \sigma_{jk} & : U_{ijk} \longrightarrow \partial_1^{-1} L_s \\
 \partial_2^* \sigma_{ik} & : U_{ijk} \longrightarrow \partial_2^{-1} L_s \\
 \partial_3^* \sigma_{ij} & : U_{ijk} \longrightarrow \partial_3^{-1} L_s.
 \end{aligned}$$

Mit der Gruppoidstruktur bekommen wir daraus den Schnitt

$$\mu_s(\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) : U_{ijk} \longrightarrow \partial_2^{-1} L_s.$$

Diesen vergleichen wir auf einem Punkt  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$  mit dem Schnitt  $\partial_2^* \sigma_{ik} \rightarrow \partial_2^{-1} L_s$  und erhalten in

$$\mu_s(\partial_3^* \sigma_{ij}(x) \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}(x)) = g_{ijk}(x) \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}(x) \quad (55)$$

eine Zahl  $g_{ijk}(x) \in U(1)$ . Das definiert differenzierbare Funktion en

$$g_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \longrightarrow U(1),$$



die wir die Übergangsfunktionen der Gerbe bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  und der Schnitte  $s_i, \sigma_{ij}$  nennen. Aus der Bedingung  $\sigma_{ji}^* = \kappa_2^* \sigma_{ij}^*$  entnehmen wir, dass die Übergangsfunktionen beim Vertauschen von Indizes invertiert werden, wir können dazu zum Beispiel die Schnitte auf beiden Seiten in (55) konjugieren und erhalten

$$\mu_s^* (\partial_3^* \sigma_{ij}^* \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}^*) = \bar{g}_{ijk}(x) \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}^* = g_{ijk}^{-1}(x) \cdot \kappa_3^* \partial_2^* \sigma_{ki}$$

Dann wandeln wir die linke Seite anhand der bekannten Regeln um in

$$\begin{aligned} \mu_s^* (\partial_3^* \sigma_{ij}^* \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}^*) &= (\kappa_3^* \mu_s \circ ex) (\kappa_3^* \partial_1^* \sigma_{ji} \otimes \kappa_3^* \partial_3^* \sigma_{kj}) \\ &= \kappa_3^* (\mu_s (\partial_3^* \sigma_{kj} \otimes \partial_1^* \sigma_{ji})), \end{aligned}$$

und erhalten durch Vergleich

$$g_{kji}(x) = g_{ijk}^{-1}(x). \quad (56)$$

Wir betrachten weiter eine nichtleere vierfache Schnittmenge  $U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$ , die vier Schnitte

$$\begin{aligned} \partial_{12}^* \sigma_{kl} : U_{ijkl} &\longrightarrow \partial_{12}^* L & \partial_{14}^* \sigma_{jk} : U_{ijkl} &\longrightarrow \partial_{14}^* L \\ \partial_{23}^* \sigma_{il} : U_{ijkl} &\longrightarrow \partial_{23}^* L & \partial_{34}^* \sigma_{ij} : U_{ijkl} &\longrightarrow \partial_{34}^* L, \end{aligned}$$

und verwenden die in der Definition 3.3A geforderte Assoziativität von  $\mu_s$ , um die drei Vektoren  $\partial_{34}^* \sigma_{ij}(x)$ ,  $\partial_{14}^* \sigma_{jk}(x)$  und  $\partial_{12}^* \sigma_{kl}(x)$  auf zwei verschiedene Arten zu multiplizieren:

$$\begin{aligned} \mu (\mu (\partial_{34}^* \sigma_{ij} \otimes \partial_{14}^* \sigma_{jk}) \otimes \partial_{12}^* \sigma_{kl}) &= \mu (\partial_{34}^* \sigma_{ij} \otimes \mu (\partial_{14}^* \sigma_{jk} \otimes \partial_{12}^* \sigma_{kl})) \\ &\parallel \\ g_{ijk} \cdot \mu (\partial_{24}^* \sigma_{ik} \otimes \partial_{12}^* \sigma_{kl}) &= g_{jkl} \cdot \mu (\partial_{34}^* \sigma_{ij} \otimes \partial_{12}^* \sigma_{jl}) \\ &\parallel \\ g_{ijk} \cdot g_{ikl} \cdot \partial_{23}^* \sigma_{il} &= g_{jkl} \cdot g_{ijl} \cdot \partial_{23}^* \sigma_{il} \end{aligned}$$

Wir lesen aus der unteren Zeile die Eigenschaft

$$g_{jkl} \cdot g_{ikl}^{-1} \cdot g_{ijl} \cdot g_{ijk}^{-1} = 1 \quad (57)$$

ab.

Es stellt sich unmittelbar die Frage, inwieweit diese Übergangsfunktionen von den getroffenen Wahlen abhängen. Wir diskutieren die Wahl anderer Schnitte  $s'_i : U_i \longrightarrow Y$  und demzufolge auch anderer Schnitte  $\sigma'_{ij} : U_{ij} \longrightarrow L_{s'}$ . Unangenehm bei dieser Diskussion ist vor allem, dass wir die Schnitte  $s_i$  und  $s'_i$  nach  $Y$  nicht direkt vergleichen können, da  $Y$  im Allgemeinen kein Faserbündel ist und keine Strukturgruppe hat, die auf den Fasern operiert. Wir müssen daher einen Umweg einschlagen und definieren neben den schon bekannten Abbildungen  $s, s' : M_{\mathfrak{U}} \longrightarrow Y$  die Abbildung  $\tilde{s} : M_{\mathfrak{U}} \longrightarrow Y_M^{[2]}$  durch  $\tilde{s}(x, i) := (s_i(x), s'_i(x))$ . Das Geradenbündel  $L$  über  $Y_M^{[2]}$  ziehen wir dann mit  $\tilde{s}$  zu einem Geradenbündel  $L_{\tilde{s}}$  über  $M_{\mathfrak{U}}$  zurück. Dann betrachten wir Elemente von  $Y_M^{[4]}$  im Bild der Abbildung

$$\alpha : (M_{\mathfrak{U}})_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[4]} : (x, i, j) \longrightarrow (s_i(x), s'_i(x), s'_j(x), s_j(x)).$$

Für die daraus entnommenen Abbildungen  $\alpha_3 := \partial_3 \circ \alpha$  und  $\alpha_1 := \partial_1 \circ \alpha$  gilt  $\partial_1 \circ \alpha_3 = \partial_2 \circ \alpha_1$ , außerdem werden sie durch die folgenden Identitäten mit den Abbildungen  $s, s'$  und  $\tilde{s}$  in Zusammenhang gebracht:

$$\begin{aligned} \partial_3 \circ \alpha_3 &= \tilde{s} \circ \partial_2 & \partial_2 \circ \alpha_3 &= s^2 \\ \partial_1 \circ \alpha_1 &= \kappa_2 \circ \tilde{s} \circ \partial_1 & \partial_3 \circ \alpha_1 &= s'^2 \end{aligned}$$

Durch Zurückziehen der Gruppoidstruktur  $\mu$  mit den Abbildungen  $\alpha_3$  und  $\alpha_1$  erhalten wir nach Anwendung dieser Identitäten die Isomorphismen von Vektorbündeln

$$\begin{aligned} \alpha_3^* \mu &: \partial_2^{-1} \tilde{s}^{-1} L \otimes \alpha_1^{-1} \partial_2^{-1} L \longrightarrow L_s \\ \alpha_1^* \mu &: L_{s'} \otimes \partial_1^{-1} \tilde{s}^{-1} L^* \longrightarrow \alpha_1^{-1} \partial_2^{-1} L. \end{aligned}$$

Wir verketten sie zu dem Isomorphismus

$$\alpha_3^* \mu \circ (1 \otimes \alpha_1^* \mu) : \partial_2^{-1} \tilde{s}^{-1} L \otimes L_{s'} \otimes \partial_1^{-1} \tilde{s}^{-1} L^* \longrightarrow L_s.$$

Wählen wir nun Hilfsschnitte  $\sigma_i : U_i \longrightarrow \tilde{s}^{-1} L^+$  mit zurückgezogenen Schnitten  $\partial_1^* \sigma_j : U_{ij} \longrightarrow \partial_1^{-1} \tilde{s}^{-1} L$  und  $\partial_2^* \sigma_i : U_{ij} \longrightarrow \partial_2^{-1} \tilde{s}^{-1} L$ , so können wir über

$$\alpha_3^* \mu \circ (1 \otimes \alpha_1^* \mu) (\partial_2^* \sigma_i \otimes \sigma'_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_j^*) = \lambda_{ij} \cdot \sigma_{ij} \quad (58)$$

Funktionen  $\lambda_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow U(1)$  gewinnen. Durch Anwendung von  $\kappa_2$  auf diese Gleichung bekommen wir unter Verwendung der Voraussetzung  $\kappa_2^* \sigma_{ij} = \sigma_{ji}^*$  die Eigenschaft  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ . Es seien nun  $g'_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \longrightarrow U(1)$  Übergangsfunktionen der Gerbe bezüglich der Schnitte  $s'_i$  und  $\sigma'_{ij}$ . Wenn wir die Schnitte  $\sigma_{ij}$  aus (58) mit der Gruppoidstruktur multiplizieren, ergibt sich nach Rechnung

$$\mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) = \lambda_{ij}^{-1} \cdot \lambda_{jk}^{-1} \cdot \lambda_{ik} \cdot g'_{ijk} \cdot \partial_2^* \sigma_{ik},$$

dabei geht die Assoziativität von  $\mu$  ein. Bezüglich der Schnitte  $s_i$  und  $\sigma_{ij}$  lesen wir daraus die Übergangsfunktionen

$$g_{ijk} = g'_{ijk} \cdot \lambda_{jk}^{-1} \cdot \lambda_{ik} \cdot \lambda_{ij}^{-1} \quad (59)$$

ab.

Selbstverständlich gehen wir angesichts der gesammelten Eigenschaften (55), (56) und (59) der Übergangsfunktionen wieder zur Čech-Kohomologie über. Darin bilden die Übergangsfunktionen eine Kokette  $g \in \check{C}^2(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ , und (57) entspricht gerade der Kozykelbedingung, so dass eine Klasse  $[g] \in \check{H}^2(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  definiert wird. Verschiedene Wahlen von Einheitsschnitten unterscheiden sich gemäß (59) durch den Korand einer Kokette  $\lambda \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ .

Im Vergleich mit einer anderen Überdeckung  $\mathfrak{V}$  reicht es wieder aus, eine Verfeinerung mit Verfeinerungsabbildung  $f : J \longrightarrow I$  und Inklusionen  $\iota_j : V_j \hookrightarrow U_{f(j)}$  zu betrachten. Dann können wir statt der Schnitte  $s_i : U_i \longrightarrow Y$  die zurückgezogenen Schnitte  $s'_j := \iota_j^* s_{f(j)} : V_j \longrightarrow \iota_j^{-1} Y$  wählen. Wir haben außerdem die Inklusionen

$\iota_{ij} : V_{ij} \hookrightarrow U_{f(i)f(j)}$  von zweifachen Schnittmengen, die eine auf den Zusammenhangskomponenten  $V_{ij}$  von  $M_{\mathfrak{G}}$  definierte Abbildungen  $s \circ \iota_{ij} : V_{ij} \rightarrow Y$  ergeben, die wir als Abbildung  $t : M_{\mathfrak{G}} \rightarrow Y$  auffassen. Dann wählen wir statt der Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s$  die Schnitte  $\sigma'_{ij} = \iota_{ij}^* \sigma_{ij} : V_{ij} \rightarrow L_t$ . Dann sind die Übergangsfunktionen  $g'_{ijk}$  wieder die Einschränkungen der  $g_{ijk}$  und wir haben  $f^*(g) = g'$ . Im direkten Limes werden die Klassen  $[g]$  und  $[g']$  also identifiziert. Damit haben wir gezeigt:

LEMMA 3.3F. *Die aus der Gerbe  $\mathcal{G}$  konstruierte Kohomologieklassse  $[g] \in \check{H}^2(M, \underline{U}(1))$  ist unabhängig von der Wahl der Schnitte  $s_i$ , von der Wahl der Schnitte  $\sigma_{ij}$  und von der Wahl der guten Überdeckung  $\mathfrak{U}$ .*

In Analogie zu charakteristischen Klassen von Vektorbündeln bilden wir die aus einer Gerbe  $\mathcal{G}$  konstruierte Klasse  $[g]$  über den Gruppenisomorphismus (33)  $\omega : \check{H}^2(M, \underline{U}(1)) \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z})$  ab, und nennen das Ergebnis  $\text{dd}(\mathcal{G}) := \omega([g]) \in H^3(M, \mathbb{Z})$  die Dixmier-Douady-Klasse der Gerbe.

Wir prüfen jetzt in drei Punkten, wie sich die Dixmier-Douady-Klasse mit den bekannten Operationen auf Gerben verträgt.

(1) Zuerst untersuchen wir die Dixmier-Douady-Klasse des Tensorproduktes  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  zweier Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$ . Zur Konstruktion des Kozykels wählen wir Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow Y$  und  $t_i : U_i \rightarrow Z$  und weitere Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s$  bzw.  $\tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow K_t$ , so dass sich jeweils Übergangsfunktionen  $g_{ijk}$  bzw.  $h_{ijk}$  ergeben. Für das Tensorprodukt  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H} = (Y \times_M Z, L \otimes_M K, \mu \otimes_M \nu)$  wählen wir die Schnitte

$$u_i : U_i \rightarrow Y \times_M Z : x \mapsto (s_i(x), t_i(x))$$

aus. Für die daraus gebildete Abbildung  $u : M_{\mathfrak{U}} \rightarrow Y \times_M Z$  und die komponentenweise auf die zweifachen Faserprodukte erweiterten Abbildungen  $s^2, t^2$  und  $u^2$  gelten  $\partial_2^2 \circ u^2 = s^2$  und  $\partial_1^2 \circ u^2 = t^2$ . Damit ist

$$(L \otimes_M K)_u = (u^2)^{-1} \left( (\partial_2^2)^{-1} L \otimes (\partial_1^2)^{-1} K \right) = L_s \otimes K_t$$

So können wir gerade die Schnitte

$$\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow (L \otimes_M K)_u$$

wählen. Der Rest ist Anwendung von Definitionen, etwa der der Gruppoidstruktur auf dem Tensorprodukt

$$\begin{aligned} & (\mu \otimes_M \nu)_u (\partial_3^* (\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij}) \otimes \partial_1^* (\sigma_{jk} \otimes \tau_{jk})) \\ &= \mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) \otimes \nu_t (\partial_3^* \tau_{ij} \otimes \partial_1^* \tau_{jk}) \\ &= g_{ijk} \cdot h_{ijk} \cdot \partial_2^* (\sigma_{ik} \otimes \tau_{ik}). \end{aligned}$$

Für das Tensorprodukt erhalten wir also den Kozykel  $g \cdot h$ , die Dixmier-Douady-Klasse der Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  ist demnach die Summe der Dixmier-Douady-Klassen von  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$ ,

$$\text{dd}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) = \text{dd}(\mathcal{G}) + \text{dd}(\mathcal{H}).$$

(2) Als nächstes wollen wir die Dixmier-Douady-Klasse einer trivialen Gerbe  $t \left( \frac{K}{Y} \right)$  angeben, wobei  $L \rightarrow Y$  ein hermitesches Geradenbündel über einem Faserbündel  $\pi : Y \rightarrow M$  ist. Gemäß unserer Konstruktion müssen wir das zurückgezogene Geradenbündel  $L_s$  betrachten, in unserem Fall ist es

$$L_s \equiv (s^2)^{-1} t(L) \equiv (s^2)^{-1} (\partial_2^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} L^*) = \partial_2^{-1} s^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} s^{-1} L^*.$$

Das motiviert uns, zuerst Schnitte  $\sigma_i : U_i \rightarrow s^{-1} L^+$  zu wählen, und außerdem noch Funktionen  $\chi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  mit  $\chi_{ij} = \chi_{ji}^{-1}$ , und dann daraus Schnitte nach  $L_s$  zu definieren, nämlich

$$\sigma_{ij} := \chi_{ij} \cdot \partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^* : U_{ij} \rightarrow L_s^+.$$

Die so gewählten Schnitte erfüllen die Bedingung

$$\begin{aligned} \kappa_2^* \sigma_{ij} &= \chi_{ij} \cdot \kappa_2^* (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*) = \bar{\chi}_{ij}^{-1} \cdot \partial_1^* \sigma_i \otimes \partial_2^* \sigma_j^* \\ &= (\chi_{ji} \cdot \partial_2^* \sigma_j \otimes \partial_1^* \sigma_i^*)^* = \sigma_{ji}^*. \end{aligned}$$

Aus ihnen können wir daher Übergangsfunktionen der Gerbe gewinnen, indem wir wie oben auf einer nichtleeren dreifachen Schnittmengen  $U_i \cap U_j \cap U_k$  unter Ausnutzung der Definition der Gruppoidstruktur  $\mu_s = 1 \otimes \text{kan} \otimes 1$  auf der trivialen Gerbe in der Rechnung

$$\begin{aligned} \mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) &= \chi_{ij} \cdot \chi_{jk} \cdot \mu_s (\partial_3^* \partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_3^* \partial_1^* \sigma_j^* \otimes \partial_1^* \partial_2^* \sigma_j \otimes \partial_1^* \partial_1^* \sigma_k^*) \\ &= \chi_{ij} \cdot \chi_{jk} \cdot \partial_2^* (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_k^*) = \chi_{ij} \cdot \chi_{jk} \cdot \chi_{ik}^{-1} \cdot \partial_2^* \sigma_{ik} \end{aligned}$$

die Übergangsfunktionen

$$g_{ijk} = \chi_{jk} \cdot \chi_{ik}^{-1} \cdot \chi_{ij} : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow U(1)$$

identifizieren. Beim Übergang zur Čech-Kohomologie haben wir daher  $g = \delta\chi$ , das heißt  $[g] = 0$ . Die Dixmier-Douady-Klasse der trivialen Gerbe  $t \left( \frac{K}{Y} \right)$  ist daher

$$\text{dd} \left( t \left( \frac{K}{Y} \right) \right) = 0.$$

(3) Jetzt fehlt uns nur noch, die Dixmier-Douady-Klassen von isomorphen Gerben zu vergleichen. Die Gerben seien gegeben durch  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Y, K, \nu)$  und die Isomorphie durch einen Isomorphismus  $\alpha : L \rightarrow K$  von hermiteschen Geradenbündeln, der mit den Gruppoidstrukturen verträglich ist. Nach dem inneren Zurückziehen der Gerben mit  $s : M_{\text{U}} \rightarrow Y$  sind die Geradenbündel immer noch isomorph durch

$$\alpha_s := (s^2)^* \alpha : L_s \rightarrow K_s.$$

Wir wählen wieder Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s^+$  für die Gerbe  $\mathcal{G}$  und weitere Schnitte  $\alpha_s \circ \sigma_{ij}$  nach  $K_s$ . Da  $\alpha_s$  mit den zurückgezogenen Gruppoidstrukturen  $\mu_s$  und  $\nu_s$  verträglich ist, haben wir gemäß (54)

$$\begin{aligned} \nu_s (\partial_3^* (\alpha_s \circ \sigma_{ij}) \otimes \partial_1^* (\alpha_s \circ \sigma_{jk})) &= \nu_s (\partial_3^* \alpha_s (\partial_3^* \sigma_{ij}) \otimes \partial_1^* \alpha_s (\partial_1^* \sigma_{jk})) \\ &= \partial_2^* \alpha_s \circ \mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) \\ &= \partial_2^* \alpha_s (g_{ijk} \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}). \end{aligned}$$

Die  $\mathbb{C}$ -Linearität von  $\alpha$  und der Vergleich mit (55) ergibt

$$\partial_2^* \alpha_s (g_{ijk} \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}) = g_{ijk} \cdot \partial_2^* (\alpha_s \circ \sigma_{ik}),$$

für isomorphe Gerben können damit dieselben Übergangsfunktionen gewählt werden, sie haben also gleiche Dixmier-Douady-Klassen. Insbesondere folgt, da  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  eine triviale Gerbe ist, aus

$$0 = \text{dd}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*) = \text{dd}(\mathcal{G}) + \text{dd}(\mathcal{G}^*),$$

dass die Dixmier-Douady-Klasse der dualen Gerbe  $\mathcal{G}^*$  das negative der Dixmier-Douady-Klasse von  $\mathcal{G}$  ist,

$$\text{dd}(\mathcal{G}^*) = -\text{dd}(\mathcal{G}).$$

Wir sind jetzt in der Lage, einen Satz zur Klassifikation von Gerben zu formulieren.

**SATZ 3.3G.** *Die Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von Gerben ist vermittels der Dixmier-Douady-Klasse isomorph zur Kohomologiegruppe  $H^3(M, \mathbb{Z})$ .*

*Beweis.* Es seien  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  zwei stabil isomorphe Gerben, die Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$  ist also trivial. Aus den Punkten (1) bis (3) folgt dann

$$0 \stackrel{(2),(3)}{=} \text{dd}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*) \stackrel{(1)}{=} \text{dd}(\mathcal{G}) + \text{dd}(\mathcal{H}^*) \stackrel{(3)}{=} \text{dd}(\mathcal{G}) - \text{dd}(\mathcal{H}),$$

das heißt, die Dixmier-Douady-Klassen von stabil isomorphen Gerben sind gleich. Das rechtfertigt auch unser Vorgehen beim Bestimmen der Übergangsfunktionen der Gerbe  $\mathcal{G}$ , die wir ja eigentlich aus der durch inneres Zurückziehen erzeugten Gerbe  $i_s(\mathcal{G})$  gewonnen hatten. Diese ist nach Lemma 3.3E jedoch stabil isomorph zu  $\mathcal{G}$ , hat also passenderweise auch dieselbe Dixmier-Douady-Klasse. Daher definiert die Zuordnung der Dixmier-Douady-Klasse eine Abbildung auf der Menge der stabilen Isomorphieklassen. (1) besagt, dass sie die Gruppenstruktur respektiert, wir haben also einen Gruppenhomomorphismus. Die Surjektivität zeigen wir konstruktiv, indem wir aus einem gegebenen Kozykel  $g \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \underline{U}(1))$  eine Gerbe rekonstruieren. Dazu nehmen wir als Bündelraum die uns schon bekannte Menge  $M_{\mathcal{U}}$  und wählen das triviale hermitesche Geradenbündel  $L := (M_{\mathcal{U}})_M^{[2]} \times \mathbb{C}$ . Zur Definition der Gruppoidstruktur betrachten wir einen Punkt  $(x, i, j, k) \in (M_{\mathcal{U}})_M^{[3]}$ , und definieren durch

$$\mu|_{(x,i,j,k)} : L|_{(x,i,j)} \otimes L|_{(x,j,k)} \longrightarrow L|_{(x,i,k)} : z_1 \otimes z_2 \longmapsto g_{ijk}(x) \cdot z_1 \cdot z_2 \quad (60)$$

eine Gruppoidstruktur, deren Assoziativität genau durch die Kozykelbedingung an  $g$  gewährleistet wird. Damit haben wir eine Gerbe  $(M_{\mathcal{U}}, L, \mu)$  definiert. Man erkennt, dass die obige Konstruktion bei der Wahl von Schnitten  $\sigma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow L : x \longmapsto 1 \in L|_{(x,i,j)}$  genau dieselben Übergangsfunktionen  $g_{ijk}$  produziert.

Zum Beweis der Injektivität nehmen wir eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  mit Dixmier-Douady-Klasse  $\text{dd}(\mathcal{G}) = 0$  an. Es seien dazu wieder Schnitte  $s_i$  und  $\sigma_{ij}$  gewählt, so dass  $\text{dd}(\mathcal{G})$  repräsentiert wird durch einen Kozykel  $g \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \underline{U}(1))$ , zusammen mit einem Element

$h \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$  mit  $g = \delta h$ . Wir konstruieren nach einer Idee aus [St] explizit eine Trivialisierung von  $\mathcal{G}$ , das heißt ein hermitesches Geradenbündel  $J$  über  $\pi : Y \longrightarrow M$ , so dass die Gerben  $t(J)$  und  $\mathcal{G}$  isomorph sind. Dazu definieren wir die Abbildungen

$$y_{i_0, \dots, i_k} : \pi^{-1}(U_{i_0 \dots i_k}) \longrightarrow Y_M^{[k+2]} : y \longmapsto (y, s_{i_0}(\pi(y)), \dots, s_{i_k}(\pi(y))),$$

mit den Beziehungen

$$y_i = \partial_3 \circ y_{ij} \quad \text{bzw.} \quad y_j = \partial_2 \circ y_{ij} \quad \text{und} \quad \partial_1 \circ y_{ij} = s^2 \circ \pi.$$

Dann bekommen wir lokale Geradenbündel  $J_i := y_i^{-1}L$  über  $\pi^{-1}(U_i)$  und durch Zurückziehen der Gruppoidstruktur  $\mu$  der Gerbe den Isomorphismus  $y_{ij}^* \mu : J_i \otimes \pi^{-1}L_s \longrightarrow J_j$  hermitescher Geradenbündel. Wir verwenden die Schnitte  $t_{ij} := \pi^*(h_{ij}^{-1} \cdot \sigma_{ij}) : \pi^{-1}(U_{ij}) \longrightarrow \pi^{-1}L_s$  und bekommen durch teilweises Einsetzen den Isomorphismus

$$\phi_{ij} := (y_{ij}^* \mu)(\cdot \otimes t_{ij}) : J_i \longrightarrow J_j.$$

Unter Ausnutzung der Assoziativität von  $\mu$  und der Kozykelbedingung  $h_{jk} \cdot h_{ik}^{-1} \cdot h_{ij} = g_{ijk}$  folgt für diese Abbildungen  $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ . Also können wir ein hermitesches Geradenbündel  $J \longrightarrow Y$  definieren, so dass wir mit den Inklusionen  $\iota_i : \pi^{-1}(U_i) \hookrightarrow Y$  unsere lokalen Bündel  $\iota_i^{-1}J = J_i$  zurückerhalten.

Einen Isomorphismus der Geradenbündel  $t(J)$  und  $L$  bekommen wir, indem wir zunächst wieder lokale Isomorphismen  $\eta_i : t(J_i) \longrightarrow (\iota_i^2)^{-1}L$  bestimmen. Wir definieren dazu die Abbildung

$$\alpha_i : (\pi^{-1}(U_i))_M^{[2]} \longrightarrow Y_M^{[3]} : y \longmapsto (y, s_i(\pi(y)), y')$$

mit den Eigenschaften

$$\partial_1 \circ \alpha_i = \kappa_2 \circ y_i \circ \partial_1, \quad \partial_2 \circ \alpha_i = \iota_i^2 \quad \text{und} \quad \partial_3 \circ \alpha_i = y_i \circ \partial_2.$$

Dann ziehen wir die Gruppoidstruktur  $\mu$  mit  $\alpha$  zurück und erhalten einen Isomorphismus

$$\alpha_i^* \mu : \partial_2^{-1} y_i^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} y_i^{-1} \kappa_2^{-1} L \longrightarrow (\iota_i^2)^{-1} L.$$

Die rechte Seite ist aber gerade die Definition von  $t(J_i)$ , wir haben damit unseren lokalen Isomorphismus  $\eta_i := \alpha_i^* \mu$  gefunden. Zusammen mit den Isomorphismen

$$t(\phi_{ij}) = \partial_2^* \phi_{ij} \otimes \partial_1^* \phi_{ij}^* : t(J_i) \longrightarrow t(J_j)$$

haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} t(J_i) & \xrightarrow{t(\phi_{ij})} & t(J_j) \\ & \searrow \eta_i & \swarrow \eta_j \\ & & (\iota_{ij}^2)^{-1} L \end{array}$$

Also können wir einen Isomorphismus  $\eta : t(J) \longrightarrow L$  definieren, der mit den Gruppoidstrukturen verträglich ist, damit ist  $J$  eine Trivialisierung der Gerbe  $\mathcal{G}$ .  $\square$

3.3.3 *Zusammenhang und Krümmung einer Gerbe.* Auf Gerben kann man, ähnlich wie bei Geradenbündeln, durch einen Zusammenhang eine Zusatzstruktur definieren.

DEFINITION 3.3H. *Gegeben sei eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  über  $M$ . Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf dem Geradenbündel  $p : L \rightarrow Y_M^{[2]}$  heißt Zusammenhang der Gerbe  $\mathcal{G}$ , wenn die Gruppoidstruktur  $\mu$  ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang ist.*

In dieser Definition geht ein, dass ein Zusammenhang  $\nabla$  auf  $L \rightarrow Y_M^{[2]}$  Zusammenhänge  $\partial_i^* \nabla$  auf den zurückgezogenen Bündeln  $\partial_i L$  definiert, und dass das Tensorprodukt zweier hermitescher Geradenbündel mit Zusammenhang wieder einen kanonischen Zusammenhang trägt. Dann macht die Forderung, dass

$$\mu : \partial_3^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} L \rightarrow \partial_2^{-1} L$$

ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang ist, Sinn.

Um zu sehen, dass es Zusammenhänge auf Gerben gibt, erinnern wir uns daran, dass wir zu einem beliebigen Faserbündel  $\pi : Y \rightarrow M$  und einem hermiteschen Geradenbündel  $L \rightarrow Y$  die triviale Gerbe  $t \left( \frac{L}{Y} \right)$  konstruieren konnten. Hat das Geradenbündel zusätzlich einen Zusammenhang  $\nabla$ , so können wir auch einen Zusammenhang auf der Gerbe  $t \left( \frac{L}{Y} \right)$  konstruieren. Dazu setzen wir  $t(\nabla) := \partial_2^* \nabla + \partial_1^* \nabla^*$ ; dieser Zusammenhang ist mit der Gruppoidstruktur  $\mu = 1 \otimes \text{kan} \otimes 1$  auf  $t(L)$  verträglich, da die Bedingung (46), hier

$$(1 \otimes \mu) \circ (\partial_3^* (\partial_2^* \nabla + \partial_1^* \nabla^*) + \partial_1^* (\partial_2^* \nabla + \partial_1^* \nabla^*)) = (\partial_2^* \partial_2^* \nabla + \partial_2^* \partial_1^* \nabla^*) \circ \mu$$

erfüllt ist.

Da das Geradenbündel einer Gerbe auf dem zweifachen Faserprodukt des Bündelraumes  $Y$  lebt, definiert ein Zusammenhang  $\nabla$  auf der Gerbe  $\mathcal{G}$  eine Krümmung  $K(\nabla) \in \Omega^2(Y_M^{[2]})$ . Als Krümmung der Gerbe würden wir aber in Analogie zu hermiteschen Geradenbündeln eine Differentialform vom Grad 3 auf  $M$  erwarten. Eine solche Dreiform kann der vorhandenen Struktur aber nicht entnommen werden, deshalb müssen wir auf dem Zusammenhang wiederum eine Zusatzstruktur definieren, die Krümmung des Zusammenhangs.

Zur Vorbereitung definieren wir die Abbildung

$$\delta_Y^p := \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \partial_i^* : \Omega^\bullet(Y_M^{[p]}) \rightarrow \Omega^\bullet(Y_M^{[p+1]}),$$

die eine Differentialform  $\omega \in \Omega^k(Y_M^{[p-1]})$  mit allen möglichen Weglassungsabbildungen  $\partial_i : Y_M^{[p+1]} \rightarrow Y_M^{[p]}$  zurückzieht und alternierend summiert. Den oberen Index am Symbol  $\delta_M^p$  lassen wir später weg. In dem folgenden Lemma stellen wir eine wichtige Eigenschaft dieser Abbildung vor.

LEMMA 3.3I (Murray [Mu]). *Für ein differenzierbares Bündel  $\pi : Y \longrightarrow M$  erzeugt die Abbildung  $\delta_Y$  die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\pi^*} \Omega^\bullet(Y) \xrightarrow{\delta_Y^1} \Omega^\bullet(Y_M^{[2]}) \xrightarrow{\delta_Y^2} \Omega^\bullet(Y_M^{[3]}) \xrightarrow{\delta_Y^3} \dots \quad (61)$$

*Beweis.* Hier kann man ohne Veränderung den Originalbeweis in Kapitel 8 von [Mu] verwenden. Im Spezialfall  $Y = M_M$  fällt  $\delta_Y$  genau mit dem Čech-Korandoperator zusammen, und das Lemma reduziert sich auf die verallgemeinerte Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 3.1A.  $\square$

Die Nützlichkeit der Sequenz (61) werden wir sofort erkennen. Im Grade  $\bullet = 2$  berechnen wir das Bild der Krümmung  $K(\nabla) \in \Omega^2(Y_M^{[2]})$  des Zusammenhangs  $\nabla$  auf der Gerbe  $\mathcal{G}$ , nämlich

$$\delta_Y(K(\nabla)) = -\partial_1^* K(\nabla) + \partial_2^* K(\nabla) - \partial_3^* K(\nabla).$$

Aus Korollar 3.2E (2) und (4) folgt

$$\partial_3^* K(\nabla) + \partial_1^* K(\nabla) = K(\partial_1^* \nabla + \partial_3^* \nabla).$$

Dabei ist  $\partial_1^* \nabla + \partial_3^* \nabla$  der kanonische Zusammenhang auf dem Tensorprodukt  $\partial_1^{-1} L \otimes \partial_3^{-1} L$ . Dieses ist als hermitesches Geradenbündel mit Zusammenhang isomorph zu  $\partial_2^{-1} L$ ; gemäß Punkt (1) desselben Korollars folgt also  $K(\partial_1^* \nabla + \partial_3^* \nabla) = \partial_2^* K(\nabla)$ . Damit haben wir

$$\delta_Y(K(\nabla)) = 0$$

berechnet. Es folgt nun aus der Exaktheit der Sequenz (61), dass es mindestens ein Element  $C \in \Omega^2(Y)$  gibt, so dass  $\delta_Y(C) = K(\nabla)$  ist.

DEFINITION 3.3J. *Eine Krümmung auf einer Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  ist eine Zweiform  $C \in \Omega^2(Y)$  mit  $\delta_Y(C) = K(\nabla)$ .*

Als kleines Beispiel wählen wir eine Krümmung des oben konstruierten Zusammenhangs  $t(\nabla) = \partial_2^* \nabla + \partial_1^* \nabla^*$  auf der trivialen Gerbe  $t(\frac{L}{Y})$ . Seine Krümmung ist

$$K(t(\nabla)) = \partial_2^* K(\nabla) - \partial_1^* K(\nabla) = \delta_Y(K(\nabla)).$$

Als kanonische Krümmung auf einer trivialen Gerbe bietet sich also gerade die Krümmung des Zusammenhangs auf dem Geradenbündel an,  $C := K(\nabla)$ .

Wir diskutieren jetzt das Zusammenspiel der neuen Zusatzstrukturen mit den bekannten Operationen auf Gerben. Obwohl man auch Gerben mit lediglich einem Zusammenhang untersuchen könnte, werden wir nur Gerben mit Zusammenhang und Krümmung untersuchen.



- $\alpha$ ) Wir beginnen mit dem inneren Zurückziehen einer Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$ . Dazu sei wieder  $\varphi : Z \longrightarrow Y$  eine fasertreue Abbildung und  $i_\varphi(\mathcal{G}) = (Z, L_\varphi, \mu_\varphi)$  die durch inneres Zurückziehen gewonnene Gerbe. Trägt nun  $L$  einen Zusammenhang  $\nabla$ , so wird dieser in der Konstruktion von  $i_\varphi(\mathcal{G})$  mit  $\varphi^2$  zu einem Zusammenhang  $\nabla_\varphi$  auf  $L_\varphi$  zurückgezogen. Die Gruppoidstruktur  $\mu_s := (\varphi^3)^* \mu$  ist als zurückgezogener Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang wieder ein solcher, also ist  $\nabla_\varphi$  ein Zusammenhang auf  $\mathcal{G}$ . Hat man zusätzlich eine Krümmung  $C$  von  $\nabla$ , so ist über die Identität

$$\delta_Z \circ \varphi^* = (\varphi^2)^* \circ \delta_Y : \Omega^2(Y) \longrightarrow \Omega^2(Z)$$

die Wahl  $C_\varphi := \varphi^* C$  eine Krümmung von  $\nabla_\varphi$ , es gilt nämlich

$$\delta_Z(C_\varphi) = \delta_Z(\varphi^* C) = (\varphi^2)^* \delta_Y(C) = K((\varphi^2)^* \nabla) = K(\nabla_\varphi).$$

- $\beta$ ) Die Konstruktion des Zurückziehens mit einer stetigen Abbildung  $f : X \longrightarrow M$  auf einen anderen Basisraum kann unverändert stehen bleiben, nachdem  $\partial_1 : f^{-1}Y \longrightarrow Y$  eine gültige Abbildung für inneres Zurückziehen ist.
- $\gamma$ ) Betrachten wir weiter die zu einer Gerbe  $\mathcal{G}$  duale Gerbe  $\mathcal{G}^*$ . Ist  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $\mathcal{G}$  mit Krümmung  $C$ , so ist  $\nabla^*$  ein Zusammenhang auf  $\mathcal{G}^*$ . Da für die Krümmungen  $K(\nabla^*) = -K(\nabla)$  gilt, können wir  $C^* := -C$  als Krümmung von  $\nabla^*$  wählen.
- $\delta$ ) Das Tensorprodukt zweier Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  war die Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H} = (Y \times_M Z, L \otimes_M K, \mu \otimes_M \nu)$ , wobei wir

$$L \otimes_M K = (\partial_1^2)^{-1} L \otimes (\partial_2^2)^{-1} K$$

gesetzt hatten. Aus einem Zusammenhang  $\nabla_{\mathcal{G}}$  auf  $\mathcal{G}$  mit Krümmung  $C_{\mathcal{G}}$  und einem Zusammenhang  $\nabla_{\mathcal{H}}$  auf  $\mathcal{H}$  mit Krümmung  $C_{\mathcal{H}}$  bekommen wir einen Zusammenhang

$$\nabla := (\partial_1^2)^* \nabla_{\mathcal{G}} + (\partial_2^2)^* \nabla_{\mathcal{H}}, \quad (62)$$

für den wir die Krümmung  $C := \partial_1^*(C_{\mathcal{G}}) + \partial_2^*(C_{\mathcal{H}}) \in \Omega^2(Y \times_M Z)$  wählen können.

Selbstverständlich hätten wir auch gerne einen Isomorphiebegriff von Gerben, der Zusammenhänge und Krümmungen mit berücksichtigt. Zwar wissen wir schon, dass wir Gerben besser über stabile Isomorphie verstehen, wir haben aber auch gesehen, dass wir zur Definition von stabiler Isomorphie auf den normalen Isomorphiebegriff zurückgreifen müssen.

Wir nennen also zwei Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  über  $M$  mit Zusammenhängen und Krümmungen isomorph, wenn

- 1) ihre Bündelräume gleich sind,
- 2) es einen Isomorphismus  $\alpha : L \longrightarrow K$  von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang gibt, der mit den Gruppoidstrukturen auf  $L$  und  $K$  verträglich ist, und
- 3) ihre Krümmungen gleich sind.

Insbesondere sind zwei als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung isomorphe Gerben sind also auch als Gerben isomorph. Es sollte hier betont werden, dass sich die Definition einer trivialen Gerbe nicht ändert. Eine Gerbe, ob mit Zusammenhang, Krümmung oder keines von beiden, heißt trivial, wenn sie isomorph zu einer Gerbe der Form  $t\left(\frac{K}{Y}\right)$  ist, oder äquivalent, wenn ihre Dixmier-Douady-Klasse Null ist. Das ist analog zur Terminologie von Vektorbündeln, wo man unabhängig vom Zusammenhang von trivialen Bündeln spricht.

Beispielsweise besprechen wir die triviale Gerbe  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$ . Dabei sei  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $L \rightarrow Y_M^{[2]}$  das hermitesche Geradenbündel, so dass  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  und  $t\left(\frac{L}{Y_M^{[2]}}\right)$  isomorph sind. Jetzt sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  mit Krümmung  $C$ , so dass wir auf  $\mathcal{G}^*$  den kanonischen Zusammenhang  $\nabla^*$  mit Krümmung  $-C$  haben. Dann hat der Zusammenhang  $\nabla_{\otimes}$  auf  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  die kanonische Krümmung  $C_{\otimes} = \partial_2^*(C) + \partial_1^*(-C) = \delta_Y(C)$ . Nachdem  $\nabla$  per Definition ein Zusammenhang auf dem Geradenbündel  $L \rightarrow Y_M^{[2]}$  ist, hat die triviale Gerbe  $t\left(\frac{L}{Y_M^{[2]}}\right)$  den kanonischen Zusammenhang  $t(\nabla) = \nabla_{\otimes}$  mit Krümmung  $K(t(\nabla)) = \delta_Y(C)$ . Also sind  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  und  $t\left(\frac{L}{Y_M^{[2]}}\right)$  auch als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung isomorph.

Die Definition von stabiler Isomorphie ist dann nicht schwer zu erraten.

**DEFINITION 3.3K.** *Zwei Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  mit Zusammenhängen und Krümmungen heißen stabil isomorph, wenn es ein hermitesches Geradenbündel  $L \rightarrow Y$  mit Zusammenhang  $\nabla$  gibt, so dass die Gerben  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}^*$ , ausgestattet mit kanonischem Zusammenhang und Krümmung, und  $t\left(\frac{L}{Y}\right)$ , ausgestattet mit dem Zusammenhang  $t(\nabla)$  und der Krümmung  $K(\nabla)$ , isomorph sind.*

Stabile Isomorphie von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung ist eine Äquivalenzrelation. Die Reflexivität folgt aus dem obigen Beispiel, und die anderen Punkte können analog zur Diskussion nach der Definition 3.3D besprochen werden.

Das Geradenbündel  $L \rightarrow Y$  mit Zusammenhang  $\nabla$  nennen wir einen stabilen Isomorphismus der Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  mit Zusammenhang und Krümmung. Zu zwei stabil isomorphen Gerben gibt es im Allgemeinen viele stabile Isomorphismen. Dazu haben wir analog zu Lemma 3.3C die folgende Aussage.

**LEMMA 3.3L.** *Die hermiteschen Geradenbündel über  $M$  mit flachen Zusammenhang operieren transitiv auf der Menge der stabilen Isomorphismen zweier Gerben mit Zusammenhang und Krümmung. Insbesondere haben alle stabilen Isomorphismen gleiche Krümmung.*

*Beweis.* Alle Beweisschritte im Beweis von Lemma 3.3C lassen sich auch hier anwenden. Die Flachheit des Zusammenhangs  $\nabla$  des Geradenbündels  $J \rightarrow M$  geht dabei so ein, dass das operierte Geradenbündel  $J * K$  den Zusammenhang  $\nabla_K + \pi^*\nabla$  trägt, dessen Krümmung dann gerade  $K(\nabla_K)$  ist. Das ist dann auch die Krümmung der trivialen Gerben  $t\left(\frac{J*K}{Y}\right)$  und  $t\left(\frac{K}{Y}\right)$ , und erfüllt eine der Voraussetzungen an die Isomorphie der beiden Gerben.  $\square$

Wir kommen nun darauf zurück, warum die Wahl einer Krümmung nötig ist, um aus einer Gerbe mit Zusammenhang ein für uns interessantes Objekt zu machen. Sie ermöglicht es, eine eindeutige Differentialform vom Grad 3 zu bestimmen, die Krümmung der Gerbe. Dazu berechnen wir

$$\delta_Y (dC) = d(\delta_Y C) = dK(\nabla) = 0.$$

Hier geht ein, dass das Zurückziehen von Differentialformen in der Definition der Abbildung  $\delta_Y$  mit der äußeren Ableitung vertauscht, und, dass die Krümmung des Zusammenhangs  $\nabla$  auf dem hermiteschen Geradenbündel  $L \rightarrow Y_M^{[2]}$  eine geschlossene Differentialform ist.

Jetzt verwenden wir wieder das Lemma 3.3I im Grade  $\bullet = 3$  und bekommen aus  $\delta_Y (dC) = 0$  nicht nur die Existenz einer Differentialform  $K(\nabla, C) \in \Omega^3(M)$  mit  $\pi^* K(\nabla, C) = dC$ , sondern aufgrund der Injektivität von  $\pi^*$  auch gleich deren Eindeutigkeit. Die so durch den Zusammenhang  $\nabla$  und die Krümmung  $C$  eindeutig bestimmte Dreiform  $K(\nabla, C)$  heißt die Krümmung der Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$ . Für die Krümmung gilt  $\pi^* dK(\nabla, C) = 0$ ; wieder aus Lemma 3.3I, nunmehr im Grade  $\bullet = 4$  folgt also  $dK(\nabla, C) = 0$ .

**SATZ 3.3M.** *Die Krümmung  $K(\nabla, C)$  einer Gerbe  $\mathcal{G}$  über  $M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  ist eine geschlossene Dreiform auf  $M$  und definiert eine integrale Kohomologieklassse  $[K(\nabla, C)] \in H_{dR}^3(M)$ , deren Urbild unter dem Homomorphismus  $\iota_{\mathbb{Z}} : H^3(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{dR}^3(M)$  die Dixmier-Douady-Klasse  $dd(\mathcal{G})$  der Gerbe  $\mathcal{G}$  ist. Für die Krümmung gelten die folgenden Rechenregeln:*

- (1) *Isomorphe und stabil isomorphe Gerben mit Zusammenhang und Krümmung haben dieselbe Krümmung.*
- (2) *Das Tensorprodukt zweier Gerben mit Zusammenhang und Krümmung, ausgestattet kanonischem Zusammenhang und Krümmung hat als Krümmung die Summe der Krümmungen der beiden Gerben.*
- (3) *Die Krümmung einer Gerbe mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  ist das negative der Krümmung der dualen Gerbe, ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla^*$  und der Krümmung  $-C$ .*
- (4) *Hat die Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  die Krümmung  $K(\nabla, C)$ , so hat die mit einer stetigen Abbildung  $f$  zurückgezogene Gerbe mit Zusammenhang  $\nabla_f$  und Krümmung  $C_f$  die Krümmung  $f^* K(\nabla, C)$ .*

*Beweis.* Der Satz ist eine vorgezogene Folgerung aus Satz 3.1C und dem noch zu folgernden Korollar 3.3P und steht vollständig in Analogie zum Satz 3.2E für hermitesche Geradenbündel mit Zusammenhang und deren Krümmungen.  $\square$

3.3.4 *Klassifikation von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung.* Die Tatsache, dass man einer Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung eine charakteristische Klasse in  $H^3(M, \mathbb{Z})$ , nämlich ihre Dixmier-Douady-Klasse, und eine Krümmung  $K(\nabla, C) = \Omega^3(M)$  entnehmen kann, und dass diese beiden Merkmale über den letzten Satz miteinander verknüpft sind, zusammen mit der Analogie zu hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang, läßt uns eine Verbindung zwischen Gerben mit Zusammenhang und Krümmung und der Deligne-Hyperkohomologie im Grad 2 vermuten.

Bezüglich einer guten offenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  wurde eine Deligne-Klasse im Grad 3 repräsentiert durch eine Deligne-Kokette  $(g, A, B) \in \text{Tot } {}^2\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  mit  $D(g, A, B) = 0$ . Dabei war  $g \in \check{C}^2(\mathfrak{U}, \underline{U}(1))$ ,  $A \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^1)$  und  $B \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^2)$ . Die Kozykelbedingung lautet  $\delta g = 1$ ,  $d\log(g) + \delta A = 0$  und  $dA = B$ .

Wir haben bereits aus einer Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  einen Čech-Kozykel  $g$  mit den geforderten Eigenschaften gewonnen und durch ihn die Dixmier-Douady-Klasse der Gerbe definiert. Dazu hatten wir zuerst Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow Y$  gewählt, um daraus eine Abbildung  $s : M_{\mathfrak{U}} \rightarrow Y$  zu definieren. Wir können die  $s_i$  aber auch dazu benutzen, die Krümmung  $C \in \Omega^2(Y)$  der Gerbe  $\mathcal{G}$  zu lokalen Zweiformen  $B_i := s_i^*C$  zurückziehen, diese definieren eine Čech-Kokette  $B \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^2)$ .

In dem zurückgezogenen Geradenbündel  $L_s \rightarrow (M_{\mathfrak{U}})_{\check{M}}^{[2]}$  hatten wir Schnitte  $\sigma_{ij}$  über jeder Zusammenhangskomponente  $U_{ij}$  gewählt, die die Übergangsfunktionen  $g_{ijk}$  bestimmten. Trägt  $L$  nun einen Zusammenhang  $\nabla$  der Gerbe  $\mathcal{G}$ , so trägt  $L_s$  den zurückgezogenen Zusammenhang  $\nabla_s$ , mit dem wir auf die Schnitte  $\sigma_{ij}$  wirken können. Durch  $\nabla_s \sigma_{ij} = \frac{1}{i} A_{ij} \otimes \sigma_{ij}$  werden lokale Zusammenhangsformen  $A_{ij} \in \Omega(U_{ij})$  definiert, die wir als Čech-Kokette  $A \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{\Omega}^1)$  auffassen.

Wir wollen eine Verbindung zwischen  $g$  und  $A$  herstellen und lassen den Zusammenhang  $\partial_2^* \nabla_s$  auf  $\partial_2^{-1} L_s$  auf den Schnitt

$$\partial_2^* \sigma_{ik} = g_{ijk}^{-1} \cdot \mu_s (\partial_3^{-1} \sigma_{ij} \otimes \partial_1^{-1} \sigma_{jk})$$

wirken. Dann verwenden wir die Leibnitzregel (iii) in der Definition 3.2D, nämlich

$$\begin{aligned} (\partial_2^* \nabla_s) (\partial_2^* \sigma_{ik}) &= g_{ijk}^{-1} \cdot (\partial_2^* \nabla_s) (\mu_s (\partial_3^{-1} \sigma_{ij} \otimes \partial_1^{-1} \sigma_{jk})) \\ &\quad + dg_{ijk}^{-1} \otimes \mu_s (\partial_3^{-1} \sigma_{ij} \otimes \partial_1^{-1} \sigma_{jk}). \end{aligned} \quad (63)$$

Wir verwenden jetzt, dass die Gruppoidstruktur  $\mu_s$  ein Isomorphismus von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang ist, und dürfen deshalb gemäß (46) den Zusammenhang  $\partial_2^* \nabla_s$  auf  $\partial_2^{-1} L_s$  und den Zusammenhang  $(\partial_3^* \nabla_s + \partial_1^* \nabla_s)$  auf  $\partial_3^{-1} L_s \otimes \partial_1^{-1} L_s$  vertauschen,

$$(\partial_2^* \nabla_s) (\mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk})) = (1 \otimes \mu_s) ((\partial_3^* \nabla_s + \partial_1^* \nabla_s) (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk})).$$

Die Wirkung dieser Summe von Zusammenhängen auf das Tensorprodukt von Schnitten wurde in (47) definiert, und wenn wir zum Beispiel  $\partial_3^* A_{ij} = A_{ij}|_{U_{ijk}}$  aus Bequemlichkeit

als  $A_{ij}$  schreiben, bekommen wir

$$(\partial_3^* \nabla_s + \partial_1^* \nabla_s) (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk}) = \frac{1}{i} (A_{jk} + A_{ij}) \otimes (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk})$$

Dann finden wir weiter

$$(\partial_2^* \nabla_s) (\mu_s (\partial_3^* \sigma_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_{jk})) = \frac{1}{i} (A_{jk} + A_{ij}) \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}$$

und haben damit (63) umgeformt zu

$$\frac{1}{i} A_{ij} \otimes \partial_2^* \sigma_{ik} = \frac{1}{i} (A_{jk} + A_{ij}) \otimes \partial_2^* \sigma_{ik} + dg_{ijk}^{-1} \otimes g_{ijk} \cdot \partial_2^* \sigma_{ik}.$$

Die Beliebigkeit der Schnitte  $\sigma_{ik}$  impliziert  $A_{ik} = A_{jk} + A_{ij} - \frac{1}{i} g_{ijk} dg_{ijk}^{-1}$ , oder in Ausdrücken der Čech-Kohomologie unter Verwendung von  $d \log(g^{-1}) = -d \log(g)$ ,

$$\delta A + d \log(g) = 0.$$

Als nächsten müssen wir noch eine Verbindung zwischen  $A$  und  $B$  herstellen. Dazu entnehmen wir der Definition der Krümmung eines Zusammenhangs als äußere Ableitung der lokalen Zusammenhangsformen die Gleichung  $K(\nabla_s)|_{U_{ij}} = dA_{ij}$ . Wie in Lemma 3.3I angemerkt, ist  $\delta_{M_{\mathcal{U}}} = \delta$  der normale Čech-Korandoperator, die Krümmung  $C_s$  erfüllt also die definierende Gleichung  $K(\nabla_s) = \delta C_s$ . Dann erhalten wir

$$dA_{ij} = K(\nabla_s)|_{U_{ij}} = (\delta s^* C)_{ij} = s_j^* C - s_i^* C = B_j - B_i,$$

oder in Ausdrücken von Čech-Kohomologie

$$dA = \delta B.$$

Also definiert  $(g, A, B)$  einen Deligne-Kozykel, und seine Klasse nennen wir die Deligne-Klasse  $\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C) := [(g, A, B)]$  der Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$ .

LEMMA 3.3N. Die Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, B) \in \check{H}^2(M, \mathbb{Z}(2)_D^\bullet)$  ist unabhängig von der Wahl der Schnitte  $s_i$  und  $\sigma_{ij}$ , und der Überdeckung  $\mathcal{U}$ .

*Beweis.* Wir hatten für zwei Wahlen  $s_i, s'_i$  von Schnitten und entsprechend andere Wahlen  $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$  im Abschnitt 3.3.2 einen Isomorphismus

$$\alpha_3^* \mu \circ (1 \otimes \alpha_1^* \mu) : \partial_2^{-1} \tilde{s}^{-1} L \otimes L_{s'} \otimes \partial_1^{-1} \tilde{s}^{-1} L^* \longrightarrow L_s$$

von Vektorbündeln gefunden, mit dem wir unter der Wahl von Hilfsschnitten  $\sigma_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \tilde{s}^{-1} L$  aus dem Vergleich (58)

$$\alpha_3^* \mu \circ (1 \otimes \alpha_1^* \mu) (\partial_2^* \sigma_i \otimes \sigma'_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_j^*) = \lambda_{ij} \cdot \sigma_{ij}$$

die Abbildungen  $\lambda_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow U(1)$  gefunden hatten. Für die Übergangsfunktionen der Gerbe hatten wir so die Regel  $g_{ijk} = g'_{ijk} \cdot \lambda_{jk}^{-1} \cdot \lambda_{ik} \cdot \lambda_{ij}^{-1}$  gefunden. Wir berechnen mit der Leibnitzregel für Zusammenhänge

$$\nabla_s \sigma_{ij} = \lambda_{ij}^{-1} \cdot \alpha_3^* \partial_2^* \nabla (\alpha_3^* \mu (\partial_2^* \sigma_i \otimes \alpha_1^* \mu (\sigma'_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_j^*))) + d\lambda_{ij}^{-1} \otimes (\lambda_{ij} \cdot \sigma_{ij}). \quad (64)$$

Die Wirkungs des Zusammenhangs  $\tilde{s}^{-1} \nabla$  auf den Hilfsschnitten definiert lokale Zusammenhangsformen  $F_i$ , so dass

$$(\tilde{s}^* \nabla) (\sigma_i) = \frac{1}{i} F_i \otimes \sigma_i \quad \text{und} \quad (\tilde{s}^* \nabla^*) (\sigma_i^*) = -\frac{1}{i} F_i \otimes \sigma_i^*$$

gelten. Außerdem seien  $A'_{ij}$  die lokalen Zusammenhangsformen bezüglich der Schnitte  $\sigma'_{ij}$ . Damit bekommen wir durch Anwendung der Rechenregeln für Zusammenhänge

$$\begin{aligned} & \partial_2^* \nabla (\mu (\partial_2^* \sigma_i \otimes \alpha_1^* \mu (\sigma'_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_j^*))) \\ &= \frac{1}{i} (F_i + A'_{ij} - F_j) \otimes \mu (\partial_2^* \sigma_i \otimes \alpha_1^* \mu (\sigma'_{ij} \otimes \partial_1^* \sigma_j^*)), \end{aligned}$$

das ergibt in (64) die lokalen Zusammenhangsformen

$$A_{ij} = A'_{ij} + F_i - F_j - \frac{1}{i} \lambda_{ij}^{-1} d\lambda_{ij}$$

bezüglich der Schnitte  $\sigma_{ij}$ . Zuletzt berechnen wir die Zweiform  $\tilde{s}^* \delta_Y (C) \in \Omega^2 (M_M)$  auf zwei verschiedene Weisen, nämlich zuerst über die Definition von  $\tilde{s}$  und  $\delta_Y$ , nämlich

$$\tilde{s}^* \delta_Y (C)|_{U_i} = \tilde{s}^* (\partial_2^* C - \partial_1^* C)|_{U_i} = s_i^* C - s_i'^* C = B_i - B_i',$$

und dann über die definierende Eigenschaft der Krümmung  $C$  und der Definition der Krümmung des Zusammenhangs  $\tilde{s}^* \nabla$  als Ableitung der lokalen Zusammenhangsformen  $F_i$ , nämlich

$$\tilde{s}^* \delta_Y (C)|_{U_i} = \tilde{s}^* K (\nabla) = K (\tilde{s}^* \nabla) = dF_i.$$

Wir haben also  $B_i = B_i' + dF_i$  und haben damit insgesamt die folgende Beziehung zwischen den lokalen Daten der ungestrichenen und der gestrichenen Schnitte,

$$(g, A, B) = (g', A', B') - D (\lambda, F);$$

sie definieren also die gleiche Deligne-Klasse.

Bezüglich einer anderen Überdeckung kann man genauso argumentieren wie im Beweis von Lemma 3.3F.  $\square$

Als nächstes würden wir gerne einen Bezug zwischen stabilen Isomorphieklassen von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung und der Deligne-Hyperkohomologie herstellen. Da in die Definition von stabiler Isomorphie 1.) das Tensorprodukt von Gerben, 2.) triviale

Gerben, 3.) Isomorphie und 4.) duale Gerben eingehen, untersuchen wir zunächst die Verträglichkeit der Deligne-Hyperkohomologie mit diesen Begriffen.

1.) Dazu betrachten wir also zwei Gerben  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  und  $\mathcal{H} = (Z, K, \nu)$  mit Zusammenhängen  $\nabla_{\mathcal{G}}$  bzw.  $\nabla_{\mathcal{H}}$  und Krümmungen  $C_{\mathcal{G}}$  bzw.  $C_{\mathcal{H}}$ . Nachdem wir Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow Y$  und  $t_i : U_i \rightarrow Z$  und weitere Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s$  und  $\tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_t$  gewählt haben, so dass wir Übergangsfunktionen  $g_{ijk}$  von  $\mathcal{G}$  und  $g'_{ijk}$  von  $\mathcal{H}$  erhalten, konstruieren wir wieder neue Schnitte  $u_i : U_i \rightarrow Y \times_M Z$  und  $\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow (L \otimes_M K)_u$  und hatten schon Übergangsfunktionen  $g_{ijk} \cdot g'_{ijk}$  festgestellt. Auf  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$  haben wir den kanonischen Zusammenhang  $\nabla_{\otimes} = (\partial_2^2)^* \nabla_{\mathcal{G}} + (\partial_1^2)^* \nabla_{\mathcal{H}}$  der mit  $u^2$  zu einem Zusammenhang  $\nabla_u = (\nabla_{\mathcal{G}})_s + (\nabla_{\mathcal{H}})_t$  auf  $(L \otimes_M K)_u$  zurückgezogen wird. Dort gilt

$$\nabla_u(\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij}) = \sigma_{ij} \otimes (\nabla_{\mathcal{H}})_t \tau_{ij} + (\nabla_{\mathcal{G}})_s \sigma_{ij} \otimes \tau_{ij}.$$

Die Definition der lokalen Zusammenhangsformen  $A_{ij}$  von  $\mathcal{G}$  und  $A'_{ij}$  von  $\mathcal{H}$  ergibt

$$\nabla_u(\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij}) = \frac{1}{i} (A_{ij} + A'_{ij})(\sigma_{ij} \otimes \tau_{ij}),$$

das heißt  $A_{ij} + A'_{ij}$  sind gerade die lokalen Zusammenhangsformen von  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$ . Also haben wir

$$\text{del}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}, \nabla_{\otimes}, C_{\otimes}) = \text{del}(\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}}, C_{\mathcal{G}}) + \text{del}(\mathcal{H}, \nabla_{\mathcal{H}}, C_{\mathcal{H}}).$$

2.) Bei der Konstruktion der Dixmier-Douady-Klasse einer trivialen Gerbe  $t \left( \frac{L}{Y} \right)$  hatten wir nach Wahl von  $s : M_{\mathcal{U}} \rightarrow Y$  gezeigt, dass  $L_s = \partial_2^{-1} s^{-1} L \otimes \partial_1^{-1} s^{-1} L^*$  ist und aus Schnitten  $\sigma_i : U_i \rightarrow s^{-1} L$  und Funktionen  $\chi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U(1)$  die Schnitte  $\sigma_{ij} = \chi_{ij} \cdot \partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*$  konstruiert. Die (triviale) Dixmier-Douady-Klasse wurde so durch den Kozykel  $g_{ijk} = \chi_{jk} \cdot \chi_{ik}^{-1} \cdot \chi_{ij}$  erzeugt. Trägt  $L$  nun einen Zusammenhang  $\nabla$ , so können wir mit dem Zusammenhang  $s^{-1} \nabla$  auf die Schnitte  $\sigma_i$  wirken und lokale Zusammenhangsformen  $h_i := \sigma_i^*(s^* \nabla) \in \Omega^1(U_i)$  mit  $s^* \nabla(\sigma_i) = \frac{1}{i} h_i \otimes \sigma_i$  bestimmen. Wir wirken außerdem mit dem Zusammenhang  $\nabla_s = \partial_2^* s^* \nabla + \partial_1^* s^* \nabla^*$  auf die Schnitte  $\sigma_{ij}$ , und zwar zunächst mit der Leibnitzregel

$$\nabla_s \sigma_{ij} = \chi_{ij} \cdot (\partial_2^* s^* \nabla + \partial_1^* s^* \nabla^*) (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*) + d\chi_{ij} \cdot (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*)$$

und dann im ersten Summanden mit den Regeln (46) und (47)

$$(\partial_2^* s^* \nabla + \partial_1^* s^* \nabla^*) (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*) = \frac{1}{i} (\partial_1^* h_j + \partial_2^* h_i) \otimes (\partial_2^* \sigma_i \otimes \partial_1^* \sigma_j^*).$$

Zusammen ergibt das

$$\nabla_s \sigma_{ij} = \frac{1}{i} \left( \partial_1^* h_j + \partial_2^* h_i - \frac{1}{i} \chi_{ij}^{-1} d\chi_{ij} \right) \otimes \sigma_{ij},$$

und wenn wir aus Bequemlichkeit die Einschränkungen  $\partial_1^* h_j = h_j|_{U_{ij}}$  als  $h_j$  schreiben, haben wir die gesuchten

$$A_{ij} = h_j + h_i - \frac{1}{i} \chi_{ij}^{-1} d\chi_{ij}.$$

Die kanonische Krümmung auf dieser trivialen Gerbe ist  $C = K(\nabla)$ . Auf Untermengen  $U_i$  gilt  $K(s^*\nabla)|_{U_i} = dh_i$ , und mit  $s_i = s \circ \partial_2$  bekommen wir sofort

$$B_i = s_i^*C = \partial_2^*s^*K(\nabla) = K(s^*\nabla) = dh_i.$$

Damit sind die lokalen Daten der trivialen Gerbe in Ausdrücken von Čech-Kohomologie

$$(g, A, B) = (\delta\chi, \delta h - d\log(\chi), dh) = D(\chi, h),$$

sie hat also die Deligne-Klasse Null,

$$\text{del}(t\left(\frac{K}{Y}\right), t(K), K(\nabla)) = 0.$$

3.) Betrachten wir zwei isomorphe Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  mit Zusammenhängen  $\nabla_{\mathcal{G}}$  bzw.  $\nabla_{\mathcal{H}}$  und Krümmungen  $C_{\mathcal{G}}$  bzw.  $C_{\mathcal{H}}$ . Beide Gerben haben denselben Bündelraum  $Y$ , und wir wählen Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow Y$ . Da die Krümmungen von isomorphen Gerben gleich sind, haben wir gleiche lokale Daten  $s_i^*C_{\mathcal{G}} = s_i^*C_{\mathcal{H}}$ . Weiter hatten wir Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s$  und Schnitte  $\alpha \circ \sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L$  definiert, die dieselben Übergangsfunktionen  $g_{ijk}$  ergeben. Weiter seien  $A_{ij}$  die durch  $\sigma_{ij}$  definierten lokalen Zusammenhangsformen und  $\alpha : (L, \nabla_{\mathcal{G}}) \rightarrow (K, \nabla_{\mathcal{H}})$  der Isomorphismus von den hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhängen der Gerben. Nach kurzer Rechnung haben wir

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{H}})_s(\alpha \circ \sigma_{ij}) &= (1 \otimes \alpha)(\nabla_{\mathcal{G}}\sigma_{ij}) = (1 \otimes \alpha)\left(\frac{1}{i}A_{ij} \otimes \sigma_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{i}A_{ij} \otimes (\alpha \circ \sigma_{ij}), \end{aligned}$$

damit sind die  $A_{ij}$  auch lokale Zusammenhangsformen von  $\nabla_{\mathcal{H}}$ , und die lokalen Daten der isomorphen Gerben  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  sind gleich,

$$\text{del}(\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}}, C_{\mathcal{G}}) = \text{del}(\mathcal{H}, \nabla_{\mathcal{H}}, C_{\mathcal{H}}).$$

4.) Für die zu einer Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  duale Gerbe hatten wir bereits festgestellt, dass ihr Tensorprodukt  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$  auch als Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung isomorph zu einer trivialen Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung ist. Aus 1.) bis 3.) folgt dann

$$\text{del}(\mathcal{G}, \nabla^*, -C) = -\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C).$$

Damit haben wir genug Indizien zur Formulierung des zentralen Satzes dieses Abschnittes gesammelt.

**SATZ 3.30.** *Die Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung ist vermittels der Deligne-Klasse von Gerben isomorph zur Deligne-Hyperkohomologiegruppe  $\check{H}^2(M, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$ .*



Dieser Satz wurde für Gerben in der ursprünglichen Definition von Giraud von Brylinski in [Bry] gezeigt. Er erscheint außerdem im Zusammenhang mit den hier verwendeten hermiteschen Bündelgerben in dem Artikel [MuSt] von M. K. Murray und D. Stevenson.

*Beweis.* Aus den Punkten 1.) bis 4.) folgt, dass stabil isomorphe Gerben mit Zusammenhang und Krümmung die gleiche Deligne-Klasse haben, wir können sie also als Abbildung auf den stabilen Isomorphieklassen definieren. Punkt 1.) bedeutet, dass sie ein Gruppoidhomomorphismus ist.

Aus jedem gegebenen Deligne-Kozykel  $(g, A, B) \in \text{Tot } {}^2\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  können wir eine Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung konstruieren, die die gegebenen lokalen Daten hat. Die Gerbe hatten wir schon aus dem Kozykel  $g$  konstruiert, jetzt definieren wir auf ihrem Geradenbündel  $L = \mathbb{C} \times (M_{\mathfrak{U}})_{\mathbb{M}}^{[2]}$  einen Zusammenhang über jeder Zusammenhangskomponente  $U_{ij}$  für jeden Schnitt  $s : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\nabla_{ij}(s) = ds \otimes 1 + \frac{1}{i} A_{ij} \otimes s$ . Die Krümmung dieses Zusammenhangs ist gerade  $K(\nabla_{ij}) = dA_{ij}$ . Da  $M_{\mathfrak{U}}$  in die disjunkten Zusammenhangskomponenten  $U_i$  zerfällt, können wir die Krümmung als Differentialform auf  $M_{\mathfrak{U}}$  auf jeder Komponente separat angeben, zum Beispiel  $C|_{U_i} := B_i$ . Wir haben hier wieder den Fall  $\delta_{M_{\mathfrak{U}}} = \delta$ , daher gilt  $(\delta C)_{ij} = \delta B_{ij} = dA_{ij} = K(\nabla_{ij})$ . Die Verträglichkeit der Gruppoidstruktur (60) mit dem Zusammenhang  $\nabla$  ergibt sich aus der Kozykelbedingung  $A_{jk} - A_{ik} + A_{ij} = \frac{1}{i} g_{ijk}^{-1} dg_{ijk}$ .

Zum Beweis der Injektivität nehmen wir eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  an, deren Deligne-Klasse Null ist. Es sei  $(g, A, B) \in \text{Tot } {}^2\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  ein Deligne-Kozykel, der diese Klasse repräsentiert, es gibt also ein Element  $(h, \Pi) \in \text{Tot } {}^1\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  mit  $D(h, \Pi) = (g, A, B)$ . Unter Ausnutzung der ersten Komponente dieser Bedingung hatten wir bereits ein hermitesches Geradenbündel  $J \rightarrow Y$  konstruiert, so dass  $\mathcal{G}$  und  $t(J_Y)$  isomorph sind als Gerben. Jetzt müssen wir noch einen Zusammenhang  $\nabla_J$  angeben, so dass  $\mathcal{G}$  und  $t(J_Y)$  auch als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung isomorph sind. In der Notation des Beweises von Satz 3.3G definieren wir auf den lokalen Geradenbündeln  $J_i := y_i^{-1}L$  die lokalen Zusammenhänge  $\nabla_i := y_i^* \nabla + \pi^* \Pi_i$ , wobei  $y_i^* \nabla$  ein Zusammenhang auf  $J_i$  ist und  $\pi^* \Pi_i$  eine Einsform auf  $\pi^{-1}(U_i)$ . Die Definition ist so getroffen, dass die Isomorphismen  $\phi_{ij} : J_i \rightarrow J_j$  sogar Isomorphismen von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang sind. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla_j(\phi_{ij} \circ s_i) &= (y_j^* \nabla)(y_{ij}^* \mu)(s_i \otimes t_{ij}) + \pi^* \Pi_j \otimes (\phi_{ij} \circ s_i) \\ &= (y_{ij}^* \mu)(s_i \otimes (y_{ij}^* \nabla)(t_{ij})) \\ &\quad + (y_{ij}^* \mu)((y_i^* \nabla)(s_i) \otimes t_{ij}) + \pi^* \Pi_j \otimes (\phi_{ij} \circ s_i), \end{aligned}$$

verwenden im ersten Summanden für die Wirkung des Zusammenhangs auf  $t_{ij} = \pi^*(h_{ij}^{-1} \cdot \sigma_{ij})$  zuerst die Leibnitzregel, und dann die Definition der lokalen Zusammenhangsformen  $A_{ij}$ , und erhalten

$$(y_{ij}^* \mu)(s_i \otimes (y_{ij}^* \nabla)(t_{ij})) = \frac{1}{i} \pi^* A_{ij} \otimes (\phi_{ij} \circ s_i) + \pi^*(h_{ij}^{-1} dh_{ij}) \otimes (\phi_{ij} \circ s_i).$$

Darin addieren sich nach  $\frac{1}{i} h_{ij}^{-1} dh_{ij} = d\log(h_{ij}) = -\Pi_j + \Pi_i + A_{ij}$  die Terme mit  $A_{ij}$  zu Null, während sich im gesamten Ausdruck die Terme mit  $\Pi_j$  aufheben, und es bleibt

$$\begin{aligned}\nabla_j(\phi_{ij} \circ s_i) &= (y_{ij}^* \mu) ((y_i^* \nabla)(s_i) \otimes t_{ij}) + \pi^* \Pi_i \otimes (\phi_{ij} \circ s_i) \\ &= (1 \otimes \phi_{ij}) \nabla_i(s_i),\end{aligned}$$

das ist genau die behauptete Verträglichkeit der Bündelmorphismen  $\phi_{ij}$  mit den Zusammenhängen  $\nabla_i$ . Beim Zusammenkleben der lokalen Bündel  $J_i$  zum Bündel  $J$  kleben daher auch die Zusammenhänge  $\nabla_i$  zu einem Zusammenhang  $\nabla_J$  auf  $J$  zusammen. Im nächsten Schritt hatten wir lokale Isomorphismen  $\eta_i : t(J_i) \rightarrow (t_i^2)^{-1} L$  konstruiert. Diese waren nichts anderes als die zurückgezogene Gruppoidstruktur, die mit dem Zusammenhang  $\nabla$  verträglich ist, daraus ergibt sich auch die Verträglichkeit der  $\eta_i$  mit den Zusammenhängen  $t(\nabla_i)$ . Daher sind die  $\eta_i$  Isomorphismen von hermiteschen Geradenbündeln mit Zusammenhang, genauso ist es dann auch  $\eta : t(J) \rightarrow L$ . Letztendlich ist die Krümmung der trivialen Gerbe

$$\begin{aligned}K(\nabla_J) = K(y_i^* \nabla + \pi^* \Pi_i) &= y_i^* K(\nabla) + \pi^*(d\Pi_i) \\ &= y_i^*(\partial_2^* C - \partial_1^* C) + \pi^* B_i.\end{aligned}$$

Mit  $\partial_2 \circ y_i = \text{id}$  und  $\partial_1 \circ y_i = s_i \circ \pi$ , und der Definition  $B_i := s_i^* C$  haben wir  $K(\nabla_J) = C$ . Damit sind die Gerben  $t(\overset{J}{Y})$  und  $\mathcal{G}$  isomorph als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung, das heißt,  $\mathcal{G}$  ist eine triviale Gerbe.  $\square$

**KOROLLAR 3.3P.** *Aus der Definition der Dixmier-Douady-Klasse einer Gerbe  $\mathcal{G}$  mit einem Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  und ihrer Krümmung  $K(\nabla, C)$  folgen*

$$\begin{aligned}\text{dd}(\mathcal{G}) &= \text{char}(\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C)) \\ K(\nabla, C) &= \text{curv}(\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C)).\end{aligned}$$

**3.4 Holonomie von Gerben im Wess-Zumino-Witten-Modell.** In diesem Abschnitt werden wir Holonomie von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung definieren und eine Möglichkeit erläutern, wie diese zur Definition physikalischer Modelle verwendet werden kann.

**3.4.1 Holonomie von Gerben.** Ausgehend von der Klassifizierung der stabilen Isomorphieklassen von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung können wir nun die Holonomie solcher Gerben definieren. Dazu sei  $\mathcal{G}$  eine Gerbe über  $M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$ . Sie definiert eine Deligne-Klasse  $\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C) \in \check{H}^2(M, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$ , für die wir in Abschnitt 3.1.5 die Holonomie um Abbildungen  $\phi : \Sigma \rightarrow M$  von geschlossenen, orientierten, zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma$  definiert hatten. Damit setzen wir

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) := \text{hol}(\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C), \phi).$$

Die Holonomie hängt damit nur von der stabilen Isomorphieklasse der Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung ab.

Wir sehen uns zwei Spezialfälle an, und zwar zuerst den Fall, dass die Gerbe  $\mathcal{G}$  trivial ist. Dann gibt es eine Zweiform  $\varrho \in \Omega^2(M)$ , so dass  $\text{tr}(\varrho) = \text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C)$  ist, und die Holonomie reduziert sich gemäß (42) auf das Integral

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) = \exp i \int_{\Sigma} \phi^* \varrho. \quad (65)$$

Dann hatten wir noch die Möglichkeit betrachtet, dass die Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$  umschließt, und die Abbildung  $\phi$  sich stetig zu einer Abbildung  $\tilde{\phi} : B \rightarrow M$  fortsetzen lässt. In diesem Fall haben wir mit (43) den Term

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) = \exp i \int_B \tilde{\phi}^* K(\nabla, C), \quad (66)$$

wobei gemäß Korollar 3.3P  $K(\nabla, C) = \text{curv}(\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C))$  die Krümmung der Gerbe ist.

Wir kommen nun zu einem String  $\phi : \Sigma \rightarrow M$  zurück, der an einen durch eine Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  definierten String-Hintergrund koppelt. Dann definieren wir die Amplitude im Pfadintegral durch

$$\exp(i S_{\text{kopp}}[\phi]) := \text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) \quad (67)$$

Gemäß der voranstehenden Überlegungen bekommen wir nach (65) für ein global definiertes Kalb-Ramond-Feld  $B$  mit  $H = dB$  den Ausdruck (4) und für eine Fortsetzung von  $\phi$  auf eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $B$  nach (66) den Wess-Zumino-Term (5),

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) = \exp \left( ik \int_B \tilde{\phi}^* H \right).$$

**3.4.2 Das Wess-Zumino-Witten-Modell.** Anhand von Gerben können wir nun eine neue Formulierung des Wess-Zumino-Witten-Modells angehen, die gegenüber der in Abschnitt 2 gegebenen Formulierung den wesentlichen Vorteil hat, dass sie nicht auf die Existenz der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit  $B$  mit  $\partial B = \Sigma$  oder die Existenz der Fortsetzung der Abbildung  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  auf  $B$  angewiesen ist.

Im Abschnitt 2.2.3 haben wir gesehen, dass wir über den Level  $k \in \mathbb{Z}$  des Wess-Zumino-Witten-Modells auf einer kompakten, einfachen, einfach zusammenhängenden Liegruppe  $G$  eine Reihe von Dreiformen angeben können, die integrale Kohomologieklassen repräsentieren, nämlich die Vielfachen  $kH$  der kanonischen Dreiform  $H \in \Omega^3(G)$ .

Wir suchen nun Gerben auf  $G$  mit Zusammenhang und Krümmung, deren Krümmung  $kH$  ist. Gemäß Korollar 3.1G ist die Menge aller Deligne-Hyperkohomologieklassen vom Grad 2 mit dieser vorgegebenen Krümmung ein  $H^2(G, U(1))$ -Torsor. Wir untersuchen daher kurz diese Kohomologiegruppe. Gemäß des Universellen-Koeffizienten-Theorems (19) ist

$$H^2(G, U(1)) = \text{Hom}(H_2(G), U(1)) \oplus \text{Ext}(H_1(G), U(1)).$$

Da die Gruppe einfach zusammenhängend ist, folgt  $H_1(G) = 0$ , und aus Satz 2.2A folgt  $H_2(G) = 0$ , damit verschwinden beide direkte Summanden. Damit ist für Liegruppen des betrachteten Typs  $H^2(G, U(1)) = 0$ , es gibt also nur eine Deligne-Hyperkohomologiekategorie mit der vorgegebenen Krümmung  $kH$ . Daher ist im Wess-Zumino-Witten-Modell die stabile Isomorphieklasse von Gerben mit Zusammenhang und Krümmung, die die Krümmung  $kH$  haben, eindeutig bestimmt.

In [Ga2] und [Mei] wird explizit die Konstruktion einer Gerbe  $\mathcal{G}_1$  mit Zusammenhang  $\nabla_1$  und Krümmung  $C_1$  durchgeführt, die die Krümmung  $K(\nabla_1, C_1) = H$  hat. Das  $k$ -fache Tensorprodukt dieser Gerbe mit sich selbst ergibt dann die Gerbe  $\mathcal{G}_k = \mathcal{G} \otimes \dots \otimes \mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla_k = \nabla + \dots + \nabla$  und Krümmung  $C_k = kC$ , die die Krümmung  $K(\nabla_k, C_k) = kH$  hat. Alle diese Gerben sind bis auf stabile Isomorphie eindeutig.

Dann definieren wir das Exponential des Wess-Zumino-Terms als

$$\exp(i S_{\text{WZ}}(\phi)) = \text{hol}(\mathcal{G}_k, \nabla_k, C_k, \phi).$$

Aus diesem Ausdruck kann der Wess-Zumino-Term (24) reproduziert werden, denn wenn wir nun die Existenz von  $B$  und die Fortsetzbarkeit von  $\phi$  annehmen, erhalten wir gemäß (66)

$$\text{hol}(\mathcal{G}_k, \nabla_k, C_k, \phi) = \exp\left(i \int_B \tilde{\phi}^* K(\nabla_k, C_k)\right) = \exp\left(ik \int_B \tilde{\phi}^* H\right)$$

den Wess-Zumino-Term zurück. Man kann ihn aber auch zum Ausgangspunkt einer Verallgemeinerung des Wess-Zumino-Witten-Modells für eine größere Klasse von Liegruppen machen. So gibt es bereits Konstruktionen [GaRei] von Gerben auf Gruppen, die von  $SU(n)$  überlagert werden, und auf diskreten Quotienten wie zum Beispiel  $SO(3)$ .

**3.4.3 Lokale Formulierung.** Wir wollen auch diesen Holonomieterm bezüglich einer guten Überdeckung  $\mathcal{U}$  in Ausdrücken der lokalen Daten eines Vektors  $(g, A, B) \in \text{Tot } {}^2\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{Z}(2)_D)$  der Deligne-Klasse  $\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C)$  schreiben. Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der in Abschnitt 3.2.5, dort hatten wir den Kreis  $S^1$  in Stücke  $s_\alpha$  aufgeteilt, so dass die Bilder  $\phi(s_\alpha)$  in einer der Teilmengen  $U_i$  liegen. Hier besteht die Aufteilung der Fläche  $\Sigma$  in einer Triangulierung von  $\Sigma$ . Unter einer Triangulierung verstehen wir eine Menge  $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$  von zusammenziehbaren Teilmengen von  $\Sigma$ , die wir Dreiecke nennen, so dass

- jeder Punkt  $s \in \Sigma$  in mindestens einem der Dreiecke  $\Delta_\alpha$  enthalten ist.
- der Rand jedes Dreiecks  $\Delta_\alpha$  in drei Kanten  $u, v, w \subseteq \Sigma$  aufgeteilt ist, wir schreiben  $\partial\Delta_\alpha = \{u, v, w\}$ , so dass der Schnitt zweier Kanten eines Dreiecks aus genau einem Punkt  $p = u \cap v$  besteht, diesen Punkt nennen wir Eckpunkt des Dreiecks  $\Delta_\alpha$  und schreiben  $p \in \partial u$  oder  $p \in \partial v$ .
- der Schnitt zweier nichtgleicher Dreiecke  $v = \Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$  entweder leer, eine gemeinsame Kante, oder ein gemeinsamer Eckpunkt beider Dreiecke ist.

Nach einem Satz von Cairns und Whitney wissen wir, dass jede Mannigfaltigkeit eine Triangulierung erlaubt. Durch weitere Aufteilung der Dreiecke können wir immer zu einer Triangulierung übergehen, die der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $M$  untergeordnet ist in dem Sinne, dass wir für jedes Dreieck  $\Delta_\alpha$  einen Index  $i(\alpha) \in I$  wählen können, so dass  $\phi(\Delta_\alpha) \subseteq U_{i(\alpha)}$  ist. Außerdem wählen wir noch für jede Kante  $v \subseteq \Sigma$  einen Index  $i(v) \in I$  mit  $\phi(v) \subseteq U_{i(v)}$  und für jeden Eckpunkt  $p \in \Sigma$  einen Index  $i(p)$  mit  $p \in U_{i(p)}$ .

Die Orientierung von  $\Sigma$  induziert auf jedem Dreieck  $\Delta_\alpha \subseteq \Sigma$  eine Orientierung. Jedes Dreieck induziert wiederum auf jeder seiner Kanten eine Orientierung. Ist  $v$  die gemeinsame Kante von zwei Dreiecken  $\Delta_\alpha$  und  $\Delta_\beta$ , so folgt, dass die Orientierungen, die von  $\Delta_\alpha$  und von  $\Delta_\beta$  auf  $v$  induziert werden, nicht-äquivalent sind. Mit diesen Notationen lautet die Holonomieformel (41):

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) = \exp \sum_{\alpha \in A} \int_{\Delta_\alpha} \varrho.$$

Die Zweiform  $\varrho \in \Omega^2(\Sigma)$  ist dabei so gewählt, dass die Klassen  $\text{tr}(\varrho) = [(1, 0, r(\varrho))]$  und  $\phi^*[(g, A, B)]$  gleich sind. Das bedeutet, dass es ein Element  $(f, m) \in \text{Tot } {}^1\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_{\mathcal{D}}^\bullet)$  gibt, so dass

$$\phi^*(g, A, B) + \text{D}(f, m) = (1, 0, r(\varrho)) \quad (68)$$

ist. Wir entnehmen in der dritten Komponente von (68)  $\varrho|_{\Delta_\alpha} = (\varrho_{\mathfrak{X}})_{i(\alpha)} = \phi^* B_{i(\alpha)} + \text{d}m_{i(\alpha)}$ . Unter Verwendung des Stokesschen Satzes ist dann

$$\int_{\Delta_\alpha} \varrho = \int_{\Delta_\alpha} \phi^* B_{i(\alpha)} + \text{d}m_{i(\alpha)} = \int_{\Delta_\alpha} \phi^* B_{i(\alpha)} + \sum_{v \in \partial \Delta_\alpha} \int_{v \in \partial \Delta_\alpha} m_{i(\alpha)}.$$

Die zweite Komponente von (68) lautet  $m_i = m_j + \phi^* A_{ij} + \text{dlog}(f)_{ij}$  für  $i, j \in I$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Das ergibt

$$\int_{v \in \partial \Delta_\alpha} m_{i(\alpha)} = \int_{v \in \partial \Delta_\alpha} m_{i(v)} + \phi^* A_{i(\alpha), i(v)} + \text{dlog}(f)_{i(\alpha), i(v)}.$$

Wir nutzen nun aus, dass jede Kante  $v$  Kante von genau zwei Dreiecken  $\Delta_\alpha$  und  $\Delta_\beta$  ist, hier geht also ein, dass  $\Sigma$  keinen Rand hat. In der Summe über alle Kanten,

$$\sum_{\alpha \in A} \sum_{v \in \partial \Delta_\alpha} \int_{v \in \partial \Delta_\alpha} m_{i(v)} \quad (69)$$

taucht jede Kante  $v$  demnach genau zweimal auf, und zwar - nach unserer Indexänderung - mit gleichem Index  $i(v)$ . Wie wir aber schon festgestellt hatten, werden auf  $v$  vom Dreieck  $\Delta_\alpha$  und vom Dreieck  $\Delta_\beta$  nicht-äquivalente Orientierungen induziert, deshalb haben die Integrale über  $v$  entgegengesetzte Vorzeichen, und die Summe (69) verschwindet.

Damit haben wir (41) umgeformt zu

$$\exp \sum_{\alpha \in A} \int_{\Delta_\alpha} \varrho = \prod_{\alpha \in A} \exp \int_{\Delta_\alpha} \phi^* B_{i(\alpha)} \cdot \prod_{v \in \partial \Delta_\alpha} \exp \int_v \left( \phi^* A_{i(\alpha), i(v)} + \mathbf{d} \log (f)_{i(\alpha), i(v)} \right).$$

Wir verwenden nun wieder den Stokesschen Satz und rechnen

$$\exp \int_v d \log f_{i(\alpha), i(v)} = \prod_{p \in \partial v} f_{i(\alpha), i(v)}^{\varepsilon(\alpha, v, p)},$$

dabei ist  $\varepsilon(\alpha, v, p) \in \{-1; 1\}$  positiv, wenn  $p$  Endpunkt der Kante  $v$  bezüglich der über  $\Delta_\alpha$  induzierten Orientierung ist, und negativ, wenn  $p$  der Anfangspunkt ist. Zuletzt verwenden wir noch die erste Komponente von (68), aus dieser entnehmen wir nämlich  $f_{ij} = \phi^* g_{ijk}^{-1} \cdot f_{ik} \cdot f_{jk}^{-1}$ . Das ergibt das Produkt

$$\prod_{p \in \partial v} f_{i(\alpha), i(v)}^{\varepsilon(\alpha, v, p)} = \prod_{\alpha \in A} \prod_{v \in \partial \Delta_\alpha} \prod_{p \in \partial v} \phi^* g_{i(\alpha), i(v), i(p)}^{-\varepsilon(\alpha, v, p)} \cdot f_{i(\alpha), i(p)}^{\varepsilon(\alpha, v, p)} \cdot f_{i(v), i(p)}^{-\varepsilon(\alpha, v, p)}.$$

In diesem Produkt tritt für jedes  $\alpha \in A$  jeder Punkt  $p \in \Delta_\alpha$  genau zweimal auf, nämlich einmal als Endpunkt einer Kante  $v$ , und einmal als Anfangspunkt der anschließenden Kante  $v'$ . Die Terme  $f_{i(\alpha), i(p)}^{\varepsilon(\alpha, v)}$  multiplizieren sich also für jedes  $\alpha$  zu 1, nachdem  $\varepsilon(\alpha, v, p) = -\varepsilon(\alpha, v', p)$  ist. Betrachten wir weiter zwei Dreiecke  $\Delta_\alpha$  und  $\Delta_\beta$  mit gemeinsamer Kante  $v$ . Da auf  $v$  nicht-äquivalente Orientierungen induziert werden, ist ein Eckpunkt  $p \in \partial v$  in der durch  $\Delta_\alpha$  induzierten Orientierung z.B. Anfangspunkt, und in der durch  $\Delta_\beta$  induzierten Orientierung Endpunkt, das heißt in jedem Fall ist  $\varepsilon(\alpha, v, p) = -\varepsilon(\beta, v, p)$ . Damit multiplizieren sich auch die Terme  $f_{i(v), i(p)}^{-\varepsilon(\alpha, v, p)}$  zu 1.

Es verbleibt die folgende Formel,

$$\begin{aligned} \text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi) &= \prod_{\alpha \in A} \exp \int_{\Delta_\alpha} \phi^* B_{i(\alpha)} \\ &\cdot \prod_{v \in \partial \Delta_\alpha} \exp \int_v \phi^* A_{i(\alpha), i(v)} \cdot \prod_{p \in \partial v} \phi^* g_{i(\alpha), i(v), i(p)}^{-\varepsilon(\alpha, v, p)}, \end{aligned}$$

sie involviert wie gewünscht nur die lokalen Daten von  $\xi$ . Diese Formel taucht schon 1985 bei O. Alvarez auf [Al] und wurde von K. Gawędzki und N. Reis als Holonomie einer Gerbe interpretiert [GaRei]. A.L. Carey, S. Johnson und M.K. Murray haben gezeigt [CaJoMu], dass sie sich, wie bei uns, nach Wahl von Überdeckung und Triangulierung aus der allgemeinen Definition von Holonomie einer Deligne-Klasse ergibt.

*Manche meinen,  
lechts und links  
kann man nicht verwechseln  
- werch ein Illtum!*

Ernst Jandl

## 4 Nichtorientierbare Weltflächen

In Stringtheorien vom Typ I müssen wir uns mit nichtorientierbaren Weltflächen auseinandersetzen. Dabei kommt es vor allem dadurch zu Problemen, dass Integrale von Differentialformen über nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten nicht wohldefiniert sind. Das betrifft unter anderem die Wirkungsfunktionale physikalischer Theorien, in unserem Fall vor allem den Wess-Zumino-Term.

Zum rechnerischen Umgang mit nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten  $\Sigma$  wird in der algebraischen Topologie das Orientierungsbündel, ein reelles, eindimensionales Vektorbündel über  $\Sigma$ , eingeführt. Vom Begriff der Differentialform als Schnitt im Formenbündel gehen wir nun zu dem einer Dichte über, dies sind Schnitte im Tensorprodukt des Formenbündels mit dem Orientierungsbündel. Dichten verstehen wir so als eine verallgemeinerte Art von Differentialformen, von der sich herausstellen wird, dass ihr Integral auch über nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten wohldefiniert ist.

Nun sind wir in Abschnitt 2.3.3 zu dem Schluss gekommen, dass wir das Wess-Zumino-Witten-Modell als eine Theorie von Abbildungen des doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$  betrachten müssen, die eine bestimmte Symmetrie erfüllen. Das haben wir für orientierbare Weltflächen getan und konnten nach Wahl einer globalen Orientierung die übliche Theorie mit Abbildungen  $\phi : \Sigma \rightarrow G$  reproduzieren. Auf nichtorientierbaren Weltflächen können wir eine solche globale Orientierung nicht wählen, werden also mit Abbildungen  $\hat{\phi} : \hat{\Sigma} \rightarrow G$  weiterarbeiten.

Im anschließenden Abschnitt 4.1 werden wir den doppelten Überlagerungsraum von  $\Sigma$  und Dichten auf  $\Sigma$  definieren. Dann werden wir beide Begriffe kombinieren und eine uns aus der Literatur nicht bekannte Verbindung zwischen Differentialformen auf dem doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  und Dichten auf  $\Sigma$  erarbeiten.

In Abschnitt 4.2 wenden wir uns physikalischen Theorien auf nichtorientierbaren Weltflächen, insbesondere dem Wess-Zumino-Witten-Modell, zu. Als Voraussetzung zur Behandlung solcher Theorien gehen wir davon aus, dass ein String-Hintergrund einer Theorie mit orientierbarer Weltfläche durch eine Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung bestimmt wird, eine solche aber zur Definition eines String-Hintergrundes für Theorien mit nichtorientierbarer Weltfläche nicht ausreicht. Wir werden deshalb vorschlagen, eine weitere Zusatzstruktur für eine Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung zu definieren, die wir Jandl-Struktur nennen und die damit den Namen des Autors des obenstehenden Vierzeilers trägt.

Wir werden schließlich in Abschnitt 4.2.3 einen durch eine Gerbe mit Zusammenhang, Krümmung und Jandl-Struktur definierten String-Hintergrund auf einem Torus mit bekannten, aus einem völlig anderen Zugang gefundenen Resultaten vergleichen und eine Übereinstimmung finden. In Abschnitt 4.2.4 untersuchen wir das Wess-Zumino-Witten-Modell mit nichtorientierbarer Weltfläche in einem durch eine Gerbe mit Zusammenhang, Krümmung und Jandl-Struktur gegebenen String-Hintergrund.

**4.1 Dichten auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten.** Wir definieren das Orientierungsbündel über einer Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  und geben dann eine präzise Definition des schon im Abschnitt 2.3.2 verwendeten doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$  einer Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  an. Insbesondere wird diese Definition auch für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten gültig sein. Dann werden wir die Schwierigkeiten der Integration auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten besprechen, und den Begriff einer Dichte einführen. Dieser Themenbereich wird in der Literatur nur sehr spärlich behandelt; die Definition von Dichten findet man zum Beispiel bei R. Bott und L.W. Tu [BoTu] oder bei S. Lang [La], der außerdem auch den doppelten Überlagerungsraum einführt.

In Abschnitt 4.1.3 werden wir die angekündigte Verbindung zwischen Dichten auf einer Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  und bestimmten Differentialformen auf dem doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  aufzeigen. Anhand dieser Verbindung können wir eine leicht handzuhabende Integrationsvorschrift für Dichten angeben.

4.1.1 *Der doppelte Überlagerungsraum.* Bei der noch vorzunehmenden Definition von Dichten auf der nun möglicherweise nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  spielt das Orientierungsbündel eine zentrale Rolle. Wir werden es außerdem zur Konstruktion des doppelten Überlagerungsraumes verwenden.

Wir werden uns in diesem Abschnitt auf zusammenhängende Mannigfaltigkeiten einschränken; eine Verallgemeinerung ist nicht schwierig, aber bringt keinen Informationsgewinn. Dazu wählen wir einen Atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  von  $\Sigma$ , mit einer Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  und Koordinatenabbildungen  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass die  $\varphi_i$  als Abbildungen von  $U_i$  in ihren Bildbereich  $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$  Homöomorphismen sind. Die zweifachen Schnittmengen der Koordinatenumgebungen  $U_i$  sollen zusammenhängend sein, so wie es zum Beispiel für eine gute Überdeckung der Fall ist. Die Kartenwechselabbildungen

$$h_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sind auf offenen Untermengen des  $\mathbb{R}^n$  definierte Homöomorphismen, deren Jacobi-Matrizen  $J(h_{ij}) : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , die sich wie üblich aus den zweiten partiellen Ableitungen zusammensetzen, demnach nicht-entartet sind. Die Determinante dieser Matrizen ist also eine glatte Funktion  $\det(J(h_{ij})) : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , insbesondere ist sie im ganzen Definitionsbereich entweder positiv oder negativ. Uns interessiert nur das Vorzeichen  $\text{sgn}(\det(J(h_{ij}))) \in \{-1, 1\}$ , das nämlich angibt, ob die Kartenwechselabbildung  $h_{ij}$  orientierungserhaltend oder -umkehrend ist.

Wir definieren einen Satz von Übergangsfunktionen  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^\times$  durch  $g_{ij} := \text{sgn}(\det(J(h_{ij})))$  und konstruieren daraus analog zu der in Abschnitt 3.2.2 ange-



gebenen Konstruktion eines hermiteschen Geradenbündels ein reelles Vektorbündel vom Rang eins, nämlich

$$\Theta := \left( \prod_{i \in I} U_i \times \mathbb{R} \right) / (x, i, r) \sim (x, j, g_{ij}(x) \cdot r) \quad (70)$$

mit Projektion  $\pi([x, r]) := x$ . Dieses Vektorbündel ist unabhängig von der Wahl des Atlas' und heißt das Orientierungsbündel von  $\Sigma$ . Es ist faserweise durch die Betragsfunktion auf  $\mathbb{R}$  mit einer Metrik ausgestattet. Unter den vielen äquivalenten Möglichkeiten, Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten zu definieren, geben wir hier die folgende

**DEFINITION 4.1A.** *Eine Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  heißt orientierbar, wenn das Orientierungsbündel  $\pi : \Theta \rightarrow \Sigma$  ein triviales Bündel ist.*

Die Definition ist unmittelbar äquivalent dazu, dass eine orientierbare Mannigfaltigkeit einen Atlas besitzt, in dem alle Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend sind.

Wir konstruieren nun den doppelten Überlagerungsraum als das Unterbündel  $\hat{\pi} : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  von  $\Theta$ , das aus den Elementen von  $\Theta$  mit Einheitslänge besteht. Bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  können wir auch

$$\hat{\Sigma} := \left( \prod_{i \in I} U_i \times \{-1; 1\} \right) / (x, i, r) \sim (x, j, g_{ij}(x) \cdot r) \quad (71)$$

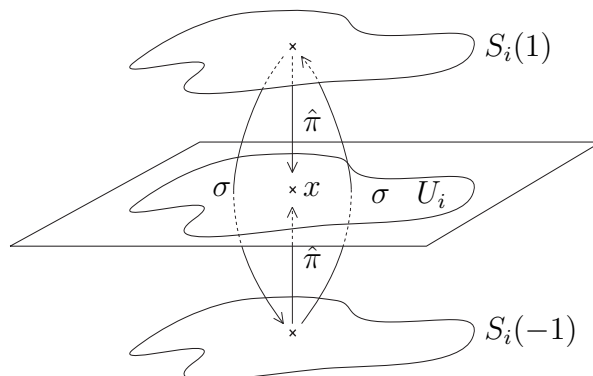
schreiben. Die Fasern  $\hat{U}_i := \hat{\pi}^{-1}(U_i)$  über den Teilmengen  $U_i$  bilden eine offene Überdeckung von  $\hat{\Sigma}$  und sind nach Konstruktion  $\hat{\pi}^{-1}(U_i) = U_i \times \{-1; 1\}$ , zerfallen also in zwei disjunkte Komponenten

$$S_i(z) = \{(x, z) \mid x \in U_i\}$$

für  $z \in \{-1; 1\}$ . Damit ist der Bündelraum  $\hat{\Sigma}$  per Definition ein Überlagerungsraum von  $\Sigma$  vom Grad 2.

Zwischen den beiden Zusammenhangskomponenten haben wir punktweise die Wechselabbildungen  $S_i(z) \rightarrow S_i(-z)$ , diese definieren lokale Involutionen  $\sigma_i : \hat{U}_i \rightarrow \hat{U}_i$ . Sie sind mit der Äquivalenzrelation in (71) verträglich und kleben damit zu einer globalen Abbildung  $\sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$  zusammen. Nachdem  $\hat{\pi}$  auf den ersten Faktor in

$\hat{U}_i = U_i \times \{-1; 1\}$  projiziert, gilt  $\hat{\pi} \circ \sigma = \hat{\pi}$ .



Wir können nun den Fall einer orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  als Spezialfall betrachten. Das Orientierungsbündel und der doppelte Überlagerungsraum sind triviale Bündel, also  $\Theta = \Sigma \times \mathbb{R}$  und  $\hat{\Sigma} = \Sigma \times \{-1; 1\}$ . Der doppelte Überlagerungsraum zerfällt also global in zwei Zusammenhangskomponenten, die wir schon in Abschnitt 2.3.2 kennengelernt und als Blätter bezeichnet haben.

Orientierungen betrachten wir nun als Schnitte in den doppelten Überlagerungsraum. Eine lokale Orientierung über eine offenen Untermenge  $U$  sehen wir also als stetige Abbildung  $\text{or}_U : U \rightarrow \hat{\Sigma}$ , so dass  $\hat{\pi} \circ \text{or}_U$  die Identität auf  $U$  ist. Wenn  $\Sigma$  orientierbar ist, können wir globale Schnitte wählen, und wenn  $\Sigma$  zusätzlich orientiert ist, so wird ein solcher globaler Schnitt  $\text{or}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \hat{\Sigma}$  ausgewählt, so wie wir es auch schon in Abschnitt 2.3.3 getan haben.

Über die Orientierbarkeit des doppelten Überlagerungsraumes geben wir noch das folgende

**LEMMA 4.1B.** *Der doppelte Überlagerungsraum einer beliebigen Mannigfaltigkeit ohne Rand ist orientierbar.*

*Beweis.* Auf dem doppelten Überlagerungsraum einer Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  lebt ein kanonisches Normalenvektorfeld, das vom jeweiligen Blatt aus nach  $M$  weist. Da der doppelte Überlagerungsraum lokal überall so aussieht wie in der obenstehenden Skizze, ist seine Richtung glatt vorgegeben, und es verschwindet nirgends.  $\square$

**4.1.2 Integration auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten.** Wir behalten den Atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  der Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  mit Kartenwechselabbildungen  $h_{ij}$  bei und betrachten eine Differentialform  $\omega \in \Omega^k(\Sigma)$  als Schnitt im Formenbündel,  $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^* \Sigma)$ . Üblicherweise definiert man das Integral einer topdimensionalen Form über  $\Sigma$  über eine dem Atlas untergeordnete Partition der Eins  $\varrho_i$ , und zwar durch ([BoTu], Prop. 3.3)

$$\int_{\Sigma} \omega := \sum_{i \in I} \int_{V_i} (\varphi_i^{-1})^* \varrho_i \omega. \quad (72)$$

Die Übergangsfunktionen des Formenbündels bezüglich der Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $\Sigma$  sind gegeben durch  $t_{ij} = \det(J(h_{ij}))^{-1}$ , beim Wechseln zwischen zwei Karten  $U_i$  und  $U_j$  mit orientierungsumkehrender Kartenwechselabbildung, das heißt  $t_{ij} < 1$ , tritt auch zwischen den Beiträgen der Integrale über  $U_i$  bzw.  $U_j$  zur Summe in (72) ein unterschiedliches Vorzeichen auf. In dieser Summe heben sich also unkontrolliert Beiträge auf, oder addieren sich fälschlicherweise.

Die hinter der Definition von Dichten stehende Idee ist, das Formenbündel so zu modifizieren, dass seine Übergangsfunktionen auch beim Kartenwechsel mit einer orientierungsumkehrenden Kartenwechselabbildung positives Vorzeichen haben. Dazu bietet sich das Tensorprodukt mit dem Orientierungsbündel an, dieses Bündel hat nämlich dann die Übergangsfunktionen

$$t'_{ij} = \det(J(h_{ij}))^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(\det(J(h_{ij}))) = \frac{1}{|\det(J(h_{ij}))|},$$

die unabhängig von den Eigenschaften der Kartenwechselabbildungen  $h_{ij}$  immer positives Vorzeichen liefern. Das so konstruierte Bündel  $\Lambda^k T^* \Sigma \otimes_{\mathbb{R}} \Theta$  heißt das  $k$ -Dichtenbündel über  $\Sigma$ . Den Vektorraum der globalen Schnitte bezeichnen wir mit  $\Omega^k(\Sigma, \Theta)$ , einen Schnitt selbst nennen wir Dichte.

Formal wird das Integral über eine topdimensionale Dichte  $\omega \in \Omega^k(\Sigma, \Theta)$  genau durch (72) definiert, im Fall von Dichten ist das Integral aber invariant unter allen, auch orientierungsumkehrenden, Diffeomorphismen des Basisraumes, und daher wohldefiniert ([BoTu] §7).

4.1.3 *Dichten und Formen auf dem doppelten Überlagerungsraum.* Wir haben nun Dichten auf der eventuell nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  kennengelernt, und den stets orientierbaren doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$ . Wir können Dichten über  $\Sigma$  integrieren und Differentialformen über  $\hat{\Sigma}$ . In diesem Abschnitt werden wir einen Zusammenhang zwischen Dichten auf  $\Sigma$  und bestimmten Differentialformen auf  $\hat{\Sigma}$  erarbeiten, der das Arbeiten mit Dichten wesentlich vereinfacht, wie wir in den darauf folgenden Abschnitten feststellen werden. Zu den Aussagen in diesem Abschnitt liegt uns keine Literatur vor, obwohl sie sehr elementar zu sein scheinen.

Die unserem Zusammenhang zwischen Formen und Dichten zugrundeliegende Idee ist, das Orientierungsbündel  $\Theta$  über  $\Sigma$ , in dem die Dichten ihre Werte annehmen, mit der Projektion  $\hat{\pi} : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  zu einem Bündel  $\hat{\pi}^{-1}\Theta$  über  $\hat{\Sigma}$  zurückzuziehen. Die Dichten ziehen wir in ihrer Eigenschaft als Schnitte ebenfalls zurück zu Schnitten im Bündel  $\hat{\pi}^{-1}\Theta$ , und werden sie dann mit Differentialformen identifizieren. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}\Theta & \xrightarrow{\partial_1} & \Theta \\ \downarrow \partial_2 & & \downarrow \pi \\ \hat{\Sigma} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \Sigma \end{array}$$

ist das zurückgezogene Orientierungsbündel die Mannigfaltigkeit

$$\hat{\pi}^{-1}\Theta = \left\{ (\hat{x}, t) \in \hat{\Sigma} \times \Theta \mid \hat{\pi}(\hat{x}) = \pi(t) \right\}.$$

Wir werden nun zeigen, dass dieses Bündel trivial ist, und konstruieren dazu einen Isomorphismus  $\Phi : \hat{\pi}^{-1}\Theta \longrightarrow \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$  von reellen Geradenbündeln. Wir verwenden wieder den Atlas  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  aus der Konstruktion des Orientierungsbündels und betrachten eine Koordinatenumgebung  $U_i \subseteq \Sigma$  und ihre Faser  $\hat{U}_i = \hat{\pi}^{-1}(U_i) \subseteq \hat{\Sigma}$  im doppelten Überlagerungsraum. Über dieser Menge haben wir nun die Faser  $\partial_2^{-1}(\hat{U}_i) \subseteq \hat{\pi}^{-1}\Theta$  des zurückgezogenen Bündels, die aus Paaren  $(\hat{x}, t) \in \hat{\pi}^{-1}\Theta$  mit  $\hat{x} \in \hat{U}_i$  und  $t \in \pi^{-1}(U_i)$  besteht. Über  $\hat{U}_i = U_i \times \mathbb{Z}_2$  und  $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{R}$  identifizieren wir  $\hat{x} = (x_i, z_i)$  und  $t = (x'_i, r_i)$ , wobei die Bedingung  $\pi(t) = \hat{\pi}(\hat{x})$  gerade  $x_i = x'_i$  bedeutet. Wir definieren zunächst lokale Homöomorphismen

$$\Phi_i : \partial_2^{-1}(\hat{U}_i) \longrightarrow \hat{U}_i \times \mathbb{R} : (\hat{x}, t) \longmapsto (\hat{x}, z_i r_i),$$

deren Inverse einem Element  $(\hat{x}, r)$  mit  $\hat{x} = (x_i, z_i)$  und  $r \in \mathbb{R}$  das Element  $\Phi_i^{-1}(\hat{x}, r) = (\hat{x}, (x_i, z_i r))$  zuordnen. Sehen wir uns nun einen Punkt  $(\hat{x}, t)$  in einer Schnittmenge  $\partial_2^{-1}\hat{U}_i \cap \partial_2^{-1}\hat{U}_j$  an. Wir identifizieren in der Faser  $\partial_2^{-1}\hat{U}_i$  wieder  $\hat{x} = (x_i, z_i)$  und  $t = (x_i, r_i)$  und genauso für die Faser  $\partial_2^{-1}\hat{U}_j$ . Bezüglich der Äquivalenzrelation in (70) ist  $z_i = g_{ij}(x_i) \cdot z_j$  und  $r_i = g_{ij}(x_i) \cdot r_j$ . Da aber in jedem Fall  $g_{ij}^2(x_i) = 1$  ist, haben wir  $z_i r_i = z_j r_j$  und daher  $\Phi_i(\hat{x}, t) = \Phi_j(\hat{x}, t)$ . Die lokalen Homöomorphismen  $\Phi_i$  kleben daher zu einem globalen Homöomorphismus  $\Phi : \hat{\pi}^{-1}\Theta \longrightarrow \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$  zusammen, dieser erfüllt  $\partial_2 \circ \Phi = \partial_2$  und ist damit ein Isomorphismus von reellen Vektorbündeln.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}\Theta & \xrightarrow{\Phi} & \hat{\Sigma} \times \mathbb{R} \\ \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 \\ \hat{\Sigma} & \xlongequal{\quad} & \hat{\Sigma} \end{array}$$

Es sei nun  $\omega \in \Omega^k(\Sigma, \Theta)$  eine Dichte, also ein Schnitt im Bündel  $\Lambda^k T^* \Sigma \otimes_{\mathbb{R}} \Theta$  über  $\Sigma$ . Über einer der Koordinatenumgebungen  $U_i$  läßt sie sich schreiben als

$$\omega|_{U_i} = \sum_{\alpha \in A} \omega_{\alpha i} \otimes s_{\alpha i} \quad (73)$$

mit lokalen Formen  $\omega_{\alpha i} \in \Omega^k(U_i)$  und lokalen differenzierbaren Schnitten  $s_{\alpha i} \in \Gamma(U_i, \Theta)$ , wobei das Tensorprodukt über  $C^\infty(U_i)$  zu nehmen ist. Wir ziehen alle Formen und Schnitte mit  $\hat{\pi} : \hat{U}_i \longrightarrow U_i$  zurück. Im ersten Fall definiert das Zurückziehen von Differentialformen lokale Formen  $\hat{\pi}^* \omega_{\alpha i} \in \Omega^k(\hat{U}_i)$ . Im zweiten Fall bekommen wir Schnitte  $\hat{\pi}^* s_{\alpha i} : \hat{U}_i \longrightarrow \hat{\pi}^{-1}\Theta$ , die wir aber mit dem Bündelisomorphismus  $\Phi$  zu Schnitten  $\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i} : \hat{U}_i \longrightarrow \mathbb{R} \times \hat{\Sigma}$  im trivialen  $\mathbb{R}$ -Bündel über  $\hat{\Sigma}$  umwandeln. Dann definieren wir durch

$$\tau_i(\omega) := \sum_{\alpha \in A} \hat{\pi}^* \omega_{\alpha i} \otimes (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i}) \quad (74)$$

einen lokalen Schnitt im Bündel  $\Lambda^k T^* \hat{\Sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ . Da wir die lokale Darstellung (73) durch Einschränkung eines global definierten Schnittes gewonnen haben, und nur mit den global definierten, stetigen Abbildungen  $\hat{\pi}^*$  und  $\Phi$  operiert haben, kleben die  $\tau_i(\omega)$  wieder zu einem globalen Schnitt  $\tau(\omega)$  zusammen. Da wir  $\Lambda^k T^* \hat{\Sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$  kanonisch mit dem Formenbündel  $\Lambda^k T^* \hat{\Sigma}$  über  $\hat{\Sigma}$  identifizieren können, haben wir so eine Differentialform  $\tau(\omega) \in \Omega^k(\hat{\Sigma})$  definiert.

Das definiert eine Abbildung

$$\tau : \Omega^k(\Sigma, \Theta) \longrightarrow \Omega^k(\hat{\Sigma}),$$

die den gewünschten Zusammenhang zwischen Dichten auf  $\Sigma$  und Differentialformen auf  $\hat{\Sigma}$  herstellt. Den Rest dieses Abschnittes verbringen wir damit, zwei wichtige Eigenschaften dieser Abbildung zu zeigen. Zunächst sehen wir in dem anschließenden Lemma, dass nur sehr spezielle Differentialformen auf dem doppelten Überlagerungsraum von Dichten auf  $\Sigma$  abstammen.

LEMMA 4.1C. *Differentialformen  $\hat{\varphi} \in \Omega^k(\hat{\Sigma})$  im Bild von  $\tau$  wechseln beim Zurückziehen durch die Involution  $\sigma : \hat{\Sigma} \longrightarrow \hat{\Sigma}$  ihr Vorzeichen; für alle  $\hat{\varphi} \in \text{im}(\tau)$  gilt also*

$$\sigma^* \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}.$$

*Beweis.* Es sei  $\hat{\varphi} \in \Omega^k(\hat{\Sigma})$  eine Differentialform im Bild der Abbildung  $\tau$ , und  $\varphi \in \Omega^k(\Sigma, \Theta)$  eine Dichte mit  $\hat{\varphi} = \tau(\varphi)$ . Dann haben wir lokal auf einer offenen Untermenge  $\hat{U}_i$  die Zerlegung (74), nämlich

$$\hat{\varphi}|_{\hat{U}_i} := \sum_{\alpha \in A} \hat{\pi}^* \varphi_{\alpha i} \otimes (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i}).$$

Da  $\sigma$  faserweise auf  $\hat{\Sigma}$  operiert, also  $\sigma(\hat{U}_i) = \hat{U}_i$  ist, können wir das Zurückziehen mit  $\sigma$  lokal auf  $\hat{U}_i$  betrachten, dort ist

$$\sigma^* \hat{\varphi}|_{\hat{U}_i} = \sum_{\alpha \in A} \sigma^* \hat{\pi}^* \varphi_{\alpha i} \otimes \sigma^* (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i}). \quad (75)$$

Im ersten Faktor des Tensorprodukts haben wir  $\sigma^* \hat{\pi}^* \varphi_i = (\hat{\pi} \circ \sigma)^* \varphi_i = \hat{\pi}^* \varphi_i$ . Im zweiten Faktor müssen wir den lokalen Schnitt  $\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i} : \hat{U}_i \longrightarrow \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$  zurückziehen zu einem lokalen Schnitt im Bündel  $\sigma^{-1}(\hat{\Sigma} \times \mathbb{R})$ . Per Definition besteht es aus Tripeln  $(\hat{x}, \hat{y}, r)$ , wobei  $(\hat{y}, r) \in \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$  ist und  $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$ , so dass  $\sigma(\hat{y}) = \hat{x}$  ist. Wir können es durch die Abbildung  $\partial_2 : \sigma^{-1}(\hat{\Sigma} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$ , die auf die Identität von  $\hat{\Sigma}$  projiziert und damit ein Isomorphismus von trivialen Bündeln ist, kanonisch mit  $\hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$  identifizieren. Wenn wir die Zahl  $r \in \mathbb{R}$  definieren durch  $(\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i})(\hat{x}) = (\hat{x}, r)$ , dann ist

$$\sigma^* (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i})(\hat{x}) = (\hat{x}, (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i})(\sigma(\hat{x}))) = (\hat{x}, \hat{x}, -r).$$

Wir identifizieren also  $\sigma^* (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i})$  mit dem Schnitt  $-\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i} : \hat{U}_i \longrightarrow \hat{\Sigma} \times \mathbb{R}$ ; im Tensorprodukt (75) tritt also in jedem Summanden ein Faktor  $-1$  auf, so dass wir  $\sigma^* \hat{\varphi}|_{\hat{U}_i} = -\hat{\varphi}|_{\hat{U}_i}$  haben.  $\square$

Wir bezeichnen die Menge der Formen  $\hat{\varphi} \in \Omega^k(\hat{\Sigma})$ , die beim Zurückziehen mit  $\sigma$  ihr Vorzeichen wechseln, mit  $\Omega^k(\hat{\Sigma})^-$ . Das voranstehende Lemma besagt, dass  $\tau$  eine Abbildung  $\tau : \Omega^k(\Sigma, \Theta) \longrightarrow \Omega^k(\hat{\Sigma})^-$  ist. Mit dem nächsten Lemma präzisieren wir diese Aussage.

**LEMMA 4.1D.** *Die Abbildung  $\tau : \Omega^k(\Sigma, \Theta) \longrightarrow \Omega^k(\hat{\Sigma})^-$  ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.*

*Beweis.*  $\tau$  ist eine lineare Abbildung, deren Surjektivität wir konstruktiv zeigen. Es sei also  $\hat{\varphi} \in \Omega^k(\hat{\Sigma})^-$ , das heißt  $\sigma^* \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}$ . Wir betrachten sie auf einer offenen Untermenge  $\hat{U}_i = U_i \times \mathbb{Z}_2$ , die aus den beiden Zusammenhangskomponenten  $S_i(1)$  und  $S_i(-1)$  besteht. Mit den beiden Abbildungen  $r_{i,z} : U_i \longrightarrow S_i(z)$  für  $z \in \mathbb{Z}_2$  ziehen wir sie zurück zu Formen  $\varphi_{i,z} := r_{i,z}^* \hat{\varphi} \in \Omega^k(U_i)$ . Außerdem definieren wir lokale Schnitte  $s_{i,z} : U_i \longrightarrow \Theta$  durch  $s_{i,z}(x) = (x, z) \in \pi^{-1}(U_i)$  für  $z \in \mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{R}$ . Dann definiert

$$\varphi|_{U_i} := \frac{1}{2} \sum_{z=-1,1} \varphi_{i,z} \otimes s_{i,z}$$

eine Dichte auf  $\Sigma$ . Wir wenden  $\tau$  an und haben dazu die Formen  $\hat{\pi}^* \varphi_{i,z}$  und die Schnitte  $\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{i,z}$  zu untersuchen. Für die ersteren ist  $\hat{\pi}^* \varphi_{i,z} = (r_{i,z} \circ \hat{\pi})^* \hat{\varphi}$ , wobei die Abbildung  $r_{i,z} \circ \hat{\pi}$  definitionsgemäß auf den beiden Zusammenhangskomponenten folgendermaßen wirkt:

$$(r_{i,z} \circ \hat{\pi})|_{\hat{U}_i}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x} & \text{für } \hat{x} \in S_i(z) \\ \sigma(\hat{x}) & \text{für } \hat{x} \in S_i(-z) \end{cases}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung  $\sigma^* \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}$  ist daher auf der Zusammenhangskomponente  $S_i(z')$  gerade  $\hat{\pi}^* \varphi_{i,z} = z'z \cdot \hat{\varphi}$ . Jetzt betrachten wir noch die Schnitte  $\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{i,z}$ . Hier gilt für ein  $\hat{x} \in S_i(z')$  gemäß der Definition des Isomorphismus  $\Phi$  die Beziehung  $(\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{i,z})(\hat{x}) = \Phi(\hat{x}, (\hat{\pi}(\hat{x}), z)) = (\hat{x}, z'z)$ . Wir fassen beide Ergebnisse zusammen und haben

$$\tau(\varphi)|_{S_i(z')} = \frac{1}{2} \sum_{z=-1,1} z'z \cdot \hat{\varphi}|_{S_i(z')} \otimes z'z = \hat{\varphi}|_{S_i(z')},$$

das heißt  $\tau(\varphi) = \hat{\varphi}$ .

Zum Beweis der Injektivität sei  $\varphi \in \Omega^k(\Sigma, \Theta)$  eine Dichte. Wir betrachten sie punktweise an einem Punkt  $x \in \Sigma$ , nämlich

$$\varphi|_x = \sum_{\alpha \in A} s_{\alpha i}(x) \cdot \varphi_{\alpha i}|_x.$$

Wir betrachten die dazugehörige Differentialform  $\tau(\varphi)$  ebenfalls punktweise an einem der beiden Punkte  $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$  in der Faser über  $x$ , also  $\hat{\pi}(\hat{x}) = x$ , und nehmen  $\tau(\varphi)|_{\hat{x}} = 0$  an. Dann gilt

$$0 = \tau(\varphi)|_{\hat{x}} = \sum_{\alpha \in A} (\Phi \circ \hat{\pi}^* s_{\alpha i})(\hat{x}) \cdot (\hat{\pi}^* \varphi_{\alpha i})|_{\hat{x}} = \sum_{\alpha \in A} \Phi(s_{\alpha i}(x)) \cdot \varphi_{\alpha i}|_x,$$

und da  $\Phi$  faserweise eine lineare Abbildung ist, auch

$$\Phi \left( \sum_{\alpha \in A} s_{\alpha i}(x) \cdot \varphi_{\alpha i}|_x \right) = \Phi(\varphi|_x) = 0.$$

Nachdem  $\Phi$  zusätzlich ein Isomorphismus ist, haben wir schon  $\varphi|_x = 0$ , die Abbildung  $\tau$  ist daher injektiv.  $\square$

**4.1.4 Integration von Dichten.** Anhand der Identifizierung von Dichten auf  $\Sigma$  mit bestimmten Differentialformen auf dem doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  können wir das Integral über eine Dichte  $\varrho \in \Omega^k(\Sigma, \Theta)$  auch bezüglich einer Triangulierung von  $\Sigma$  anschreiben. Wir beschränken uns hier auf den für uns wichtigen Fall einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, obwohl wir natürlich auch höher dimensionale Mannigfaltigkeiten triangulieren könnten.

Bei der Triangulierung verwenden wir soweit wie möglich die Konventionen aus Abschnitt 3.4.1, wir wählen also zunächst wieder unsere offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  und eine Menge von Dreiecken  $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , die dieser Überdeckung untergeordnet ist, wir haben also einen Index  $i(\alpha) \in I$  für jedes Dreieck, so dass  $\Delta_\alpha \subseteq U_{i(\alpha)}$  ist. Im Unterschied zu der in Abschnitt 3.4.1 besprochenen Triangulierung können wir hier nicht von einer Orientierung der Mannigfaltigkeit lokale Orientierungen der Dreiecke induzieren, da wir nun von einer im Allgemeinen nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit ausgehen. Wir müssen also die benötigten lokalen Orientierungen separat wählen, wobei wir sie sofort als lokale Schnitte  $\text{or}_\alpha : U_{i(\alpha)} \rightarrow \hat{\Sigma}$  in den doppelten Überlagerungsraum  $\hat{\Sigma}$  ansehen. Dann notieren wir  $\{\Delta_\alpha, \text{or}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  als Triangulierung der nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit  $\Sigma$ .

Es sei nun  $\hat{\varrho} := \tau(\varrho) \in \Omega^2(\hat{\Sigma})$  die der zu integrierenden Dichte entsprechende Differentialform auf dem doppelten Überlagerungsraum. Ihre Einschränkungen ergeben auf jeder Teilmenge  $U_i$  lokale Formen  $\hat{\varrho}_i \in \Omega^2(U_i)$ . Das Integral über die Dichte  $\varrho$  teilen wir damit so auf, dass wir jedes Dreieck mit der gewählten, lokalen Orientierung ausstatten, und die lokalen Differentialformen über dieses Gebiet integrieren,

$$\int_{\Sigma} \varrho = \sum_{\alpha \in A} \int_{\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)} \hat{\varrho}_\alpha.$$

Wir sehen hier explizit, dass das Integral unabhängig von den gewählten, lokalen Orientierungen ist, denn hätten wir auf irgendeiner Teilmenge  $U_{i(\alpha)}$  statt  $\text{or}_\alpha$  die andere Orientierung, nämlich  $\sigma \circ \text{or}_\alpha$  gewählt, so hätte dieser Summand denselben Beitrag, nämlich

$$\int_{\sigma(\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha))} \hat{\varrho}_\alpha = - \int_{\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)} \sigma^* \hat{\varrho}_\alpha = \int_{\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)} \hat{\varrho}_\alpha, \quad (76)$$

geliefert. Dabei geht ein, dass  $\sigma$  eine orientierungsumkehrende Abbildung ist, und das Integral über eine Differentialform unter orientierungsumkehrenden Transformationen das Vorzeichen wechselt.

Wir können hier eine interessante Folgerung anschließen, und setzen aus der Triangulierung von  $\Sigma$  eine Triangulierung des doppelten Überlagerungsraumes  $\hat{\Sigma}$  zusammen. Dazu nehmen wir die Dreiecke  $\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha) \subseteq \hat{U}_{i(\alpha)}$  zusammen mit den Dreiecken  $\sigma(\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)) \subseteq \hat{U}_{i(\alpha)}$ , die den gesamten Raum überdecken. Die Integrale der Differentialform  $\hat{\varrho}_\alpha$  über die Dreiecke  $\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)$  und  $\sigma(\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha))$  sind gemäß (76) gleich, wir folgern also

$$\int_{\Sigma} \varrho = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha \in A} \int_{\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha)} \hat{\varrho}_\alpha + \int_{\sigma(\text{or}_\alpha(\Delta_\alpha))} \hat{\varrho}_\alpha \right).$$

Dann steht in der Klammer nichts anderes als das Integral der Differentialform  $\hat{\varrho}$  über den doppelten Überlagerungsraum, aufgeteilt in eine Triangulierung von  $\hat{\Sigma}$ . Damit ist

$$\int_{\Sigma} \varrho = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\varrho}. \quad (77)$$

Wir können auch jederzeit den Spezialfall einer orientierbaren Fläche  $\Sigma$  betrachten, in dem  $\hat{\Sigma}$  aus zwei disjunkten Blättern besteht. Dann ist der Zusammenhang zwischen den Integralen offensichtlich.

**4.2 Gerben mit Jandl-Struktur.** In den letzten beiden Abschnitten 4.2.3 und 4.2.4 wollen wir zwei konkrete physikalische Modelle auf nichtorientierbaren Weltflächen untersuchen, und in beiden Fällen einen String-Hintergrund durch eine Gerbe  $\mathcal{G}$  über dem Zielraum  $M$  mit Zusammenhang und Krümmung vorgeben. Da es bisher nicht gelungen ist eine Theorie auf nichtorientierbaren Weltflächen durch diese Vorgaben allein zu definieren, gehen wir davon aus, dass tatsächlich neben einer Gerbe mit Zusammenhang und Krümmung mehr physikalische Information gewählt werden muss.

Das steht im Einklang mit anderen Zugängen zu nichtorientierbaren Theorien, zum Beispiel der von Orientifolds [Bru]. Dort wählt man eine Orientierungsumkehrende Orientifold-Abbildung, und erhält so zum Beispiel eine Stringtheorie vom Typ I aus solchen vom Typ IIB. Bei einem algebraischen Zugang zur Konstruktion topologischer Feldtheorien wählt man zusätzlich zu einer für orientierbare Weltflächen zur Konstruktion ausreichenden, bestimmten Frobenius-Algebra, im Fall nichtorientierbarer Weltflächen eine Reversion auf dieser Algebra [FuRuSch], das ist ein bestimmter Algebren-Homomorphismus von der Algebra in ihre opponierte Algebra.

Die Struktur, die wir als notwendige Wahl zur Definition eines String-Hintergrundes für nichtorientierte Weltflächen vorschlagen, besteht aus einer Involution  $\gamma : M \rightarrow M$  des Zielraumes, die durch Zurückziehen auf der Gerbe  $\mathcal{G}$  wirkt, so dass eine bestimmte Bedingung erfüllt ist. Diese Bedingung ist durch den algebraischen Zugang motiviert, und ihre Formulierung erfordert zunächst die Definition einer opponierten Gerbe, die wir in dieser Arbeit als neuen Begriff einführen.

**4.2.1 Opponierete Geradenbündel und Gerben.** Zu einem gegebenen komplexen Vektorraum  $V$  haben wir nicht nur den Dualraum  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ , sondern auch noch den sogenannten opponierten Vektorraum  $V^{\text{opp}}$ , der aus denselben Elementen  $v \in V$  besteht



wie  $V$ , auf dem  $\mathbb{C}$  aber durch eine andere Skalarmultiplikation  $*$  mit dem komplex konjugierten Element wirkt,  $\lambda * v := \bar{\lambda}v$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zu einem hermiteschen Geradenbündel  $L$  mit hermitescher Metrik  $h$  bekommen wir genauso ein opponiertes Bündel  $L^{\text{opp}}$ , dessen Bündelraum genau  $L$  ist, auf dessen Fasern  $\mathbb{C}$  aber durch  $*$  operiert. Die hermitesche Metrik  $h$  kann unverändert auf  $L^{\text{opp}}$  als Metrik wirken, da  $h(\lambda * x) = h(\bar{\lambda}x) = |\bar{\lambda}|^2 h(x) = |\lambda|^2 h(x)$  ist. Die veränderte Multiplikation wirkt sich auf die Übergangsfunktionen aus; haben wir zum Beispiel zwei Schnitte  $s_i : U_i \rightarrow L^+$  und  $s_j : U_j \rightarrow L^+$  und die Übergangsfunktion  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  bestimmt mit  $s_i(x) = g_{ij}(x) \cdot s_j(x)$ , so ist die komplex konjugierte Funktion  $g^{\text{opp}} = \bar{g}_{ij} = g_{ij}^{-1}$  die Übergangsfunktion im opponierten Geradenbündel. Für die Chern-Klassen gilt also

$$\text{ch}(L^{\text{opp}}) = -\text{ch}(L).$$

Genauso wie die Metrik liefert ein Zusammenhang auf  $L$  auch einen Zusammenhang  $\nabla^{\text{opp}}$  auf  $L^{\text{opp}}$ . Für einen lokalen Schnitt  $s : U \rightarrow L$  und die dazugehörige lokale Zusammenhangsform  $A \in \Omega^1(U)$  mit  $\nabla(s) = \frac{1}{i}(A \otimes s)$  haben wir aufgrund der veränderten Skalarmultiplikation die lokale Zusammenhangsform  $A^{\text{opp}} = -A$  im opponierten Bündel,  $\nabla^{\text{opp}}(s) = \frac{1}{i} * (A^{\text{opp}} \otimes s)$ . Also gilt auch für die Deligne-Klassen

$$\text{del}(L^{\text{opp}}, \nabla^{\text{opp}}) = -\text{del}(L, \nabla),$$

insbesondere sind das opponierte und das duale Bündel als hermitesche Geradenbündel sowohl mit als auch ohne Zusammenhang isomorph.

**DEFINITION 4.2A.** *Es sei  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  eine Gerbe über  $M$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$ . Die zu  $\mathcal{G}$  opponierte Gerbe  $\mathcal{G}^{\text{opp}}$  hat denselben Bündelraum  $Y$ , das zu  $L$  opponierte Geradenbündel  $L^{\text{opp}}$  und die Gruppoidstruktur  $\mu$ . Wir statten sie außerdem kanonisch mit dem opponierten Zusammenhang  $\nabla^{\text{opp}}$  und mit der Krümmung  $C^{\text{opp}} := -C$  aus.*

Wir berechnen die Dixmier-Douady-Klasse und die Deligne-Klasse der opponierten Gerbe. Wenn wir bezüglich einer guten Überdeckung  $\mathcal{U}$  für eine Gerbe  $\mathcal{G} = (Y, L, \mu)$  aus Schnitten nach  $Y$  die Abbildung  $s : M_{\mathcal{U}} \rightarrow Y$  bestimmt, und weitere Schnitte  $\sigma_{ij} : U_{ij} \rightarrow L_s^+$  gewählt haben, können wir die Übergangsfunktionen  $g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow U(1)$  aus dem Vergleich des Vektors  $\mu_s(\partial_3^{-1}\sigma_{ij}(x) \otimes \partial_1^{-1}\sigma_{jk}(x))$  mit dem Vektor  $\partial_2^{-1}\sigma_{ik}$  bestimmen. Liegt nun das opponierte Geradenbündel  $L_s^+$  vor, so tritt hier das komplex konjugierte Element  $\bar{g}_{ijk}(x)$  auf. Die Übergangsfunktionen der opponierten Gerbe sind also durch  $g_{ijk}^{\text{opp}} = g_{ijk}^{-1}$  gegeben, und für die Dixmier-Douady-Klasse gilt

$$\text{dd}(\mathcal{G}^{\text{opp}}) = -\text{dd}(\mathcal{G}).$$

Mit dem Zusammenhang  $\nabla_s$  auf  $L_s$  haben wir auf die Schnitte  $\sigma_{ij}$  gewirkt und lokale Zusammenhangsformen  $A_{ij}$  erhalten. Der opponierte Zusammenhang erzeugt auf denselben Schnitten die Zusammenhangsformen  $A_{ij}^{\text{opp}} = -A_{ij}$ . Die Definition der Krümmung  $C^{\text{opp}}$  bringt außerdem unmittelbar  $B_i^{\text{opp}} = -B_i = -s_i^*C$ . Damit ist die Deligne-Klasse

$$\text{del}(\mathcal{G}^{\text{opp}}, \nabla^{\text{opp}}, C^{\text{opp}}) = -\text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C),$$

die opponierte Gerbe ist sowohl mit Zusammenhang und Krümmung als auch ohne stabil isomorph zur dualen Gerbe  $\mathcal{G}^*$ . Für ihre Krümmung gilt damit ebenfalls

$$K(\nabla^{\text{opp}}, C^{\text{opp}}) = -K(\nabla, C).$$

**4.2.2 Jandl-Struktur.** Die durch Orientifold-Abbildungen motivierte Wahl einer Involution  $\gamma$  des Zielraumes, und die Tatsache das Begriffe wie rechts und links unter der Wirkung einer solchen, orientierungsumkehrenden Abbildungen nicht nur verwechselbar sind, sondern unter Umständen überhaupt keinen Sinn haben, veranlassen uns zu, der zu wählenden Struktur den Namen Jandl-Struktur zu geben.

Ihre Definition treffen wir wie folgt.

**DEFINITION 4.2B.** *Eine Jandl-Struktur auf einer Gerbe  $\mathcal{G}$  über  $M$  mit Zusammenhang und Krümmung ist eine Involution  $\gamma : M \rightarrow M$ , so dass die Gerben  $\gamma^*\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}^{\text{opp}}$  stabil isomorph sind als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung.*

Wir diskutieren einige Folgerungen aus der Existenz einer Jandl-Struktur auf einer Gerbe. Ist  $\nabla$  der Zusammenhang von  $\mathcal{G}$  und  $C$  die Krümmung, so gilt, da stabil isomorphe Gerben gleiche Krümmungen haben, für die Krümmung  $H := K(\nabla, C)$  die Beziehung

$$\gamma^*H = -H.$$

Zur weiteren Untersuchung der stabilen Isomorphie müssen wir uns die Gerbe  $\gamma^*\mathcal{G} \otimes (\mathcal{G}^{\text{opp}})^*$  ansehen. Ihr Bündelraum ist das Faserprodukt  $M_Y = \gamma^{-1}Y \times_M Y = (Y \times_M M) \times_M Y$ . Wir müssen hier sehr genau mit der Definition des Faserproduktes umgehen.  $M_Y$  ist demnach genau die (größtmögliche) Untermenge von  $Y \times M \times Y$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M_Y & \xrightarrow{\partial_2} & \gamma^{-1}Y & \xrightarrow{\partial_2} & Y \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

kommutiert. Wenn wir die drei möglichen Wege von oben links nach unten rechts einschlagen, haben wir

$$M_Y = \{(y, m, y') \in Y \times M \times Y \mid \gamma(\pi(y')) = \gamma(m) = \pi(y)\}. \quad (78)$$

Die Projektion von  $M_Y$  nach  $M$  ist demzufolge gegeben durch  $p(y, m, y') = \gamma(m)$ . Sind also die Gerben  $\gamma^*\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}^{\text{opp}}$  stabil isomorph, so gibt es ein hermitesches Geradenbündel  $L \rightarrow M_Y$  mit Zusammenhang  $\nabla_L$ , so dass die Gerben  $\gamma^*\mathcal{G} \otimes (\mathcal{G}^{\text{opp}})^*$  und  $t(\overset{L}{Y}_M)$  isomorph sind als Gerben mit Zusammenhang und Krümmung. Wir können daraus eine weitere Folgerung aus der Existenz einer Jandl-Struktur ziehen. Da die Krümmungen isomorpher Gerben gleich sind, und die Krümmung der trivialen Gerbe  $t(\overset{L}{Y}_M)$  gerade  $K(\nabla_L)$  ist, gilt für die Krümmung  $C$  der Gerbe  $\mathcal{G}$

$$p_1^*C + p_3^*C = K(\nabla_L), \quad (79)$$

wobei  $p_1 = \partial_2 \circ \partial_3$  in die erste und  $p_3 = \partial_1 \circ \partial_2$  in die dritte Komponente von  $M_Y$  projiziert. Insbesondere definiert  $p_1^*C + p_3^*C \in \Omega^2(M_Y)$  eine integrale Kohomologiekategorie.

Zur Behandlung des Wess-Zumino-Terms wird vor allem der folgende Satz verwendet werden.

**SATZ 4.2C.** *Gilt für eine triviale Deligne-Klasse  $\xi \in \check{H}^2(X, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit  $X$  und eine Involution  $\gamma : X \rightarrow X$  die Bedingung  $\gamma^*\xi = -\xi$ , so gibt es eine Zweiform  $\varrho \in \Omega^2(X)$  mit  $\text{tr}(\varrho) = \xi$  und  $\gamma^*\varrho = -\varrho$ .*

*Beweis.* Gemäß Lemma 3.1E gibt es eine Zweiform  $\varrho' \in \Omega^2(X)$ , so dass  $\text{tr}(\varrho') = \xi$  ist. Wir werden uns die Deligne-Hyperkohomologiekategorie  $\xi$  nun bezüglich einer Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  von  $X$  ansehen, die mit der Involution  $\gamma$  verträglich sein soll, insofern dass es eine Abbildung der Indexmenge  $\dot{\gamma} : I \rightarrow I$  gibt, so dass  $\gamma(U_i) = U_{\dot{\gamma}(i)}$  ist. Wir wollen an dieser Stelle nicht in voller Allgemeinheit die Existenz einer solchen Überdeckung diskutieren, sondern hier nur auf den für uns relevanten Fall eingehen, dass  $X$  der doppelte Überlagerungsraum einer anderen Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  ist. Dann wählen wir eine gute Überdeckung  $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in J}$  von  $\Sigma$  und ziehen sie mit  $\hat{\pi}$  nach  $X$  zurück. Die Teilmengen  $\hat{\pi}^{-1}(V_i)$  zerfallen in die beiden Zusammenhangskomponenten  $S_i(1)$  und  $S_i(-1)$ , die wir separat als Teilmengen von  $\mathfrak{U}$  nehmen. Die Schnittmengen der Form  $S_i(1) \cap S_j(1)$  sind jeweils homöomorph zu  $U_i \cap U_j$  und daher ebenso zusammenziehbar.

Bezüglich einer solchen Überdeckung wählen wir also einen Deligne-Kozykel  $(g, A, B) \in \text{Tot}^2 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$ , der die Klasse  $\xi$  repräsentiert. Für die Klasse  $\gamma^*\xi$  können wir nun bezüglich derselben Überdeckung den Deligne-Kozykel  $\gamma^*(g, A, B) \in \text{Tot}^2 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  nehmen.

Da die Klasse  $\xi$  trivial ist, gibt es ein Element  $(f, m) \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$ , so dass

$$(g, A, B) + \mathbf{D}(f, m) = (1, 0, \varrho') \quad (80)$$

gilt. Nach Voraussetzung sind außerdem die Deligne-Hyperkohomologiekategorien  $\gamma^*\xi$  und  $-\xi$  gleich. Daher haben wir ein weiteres Element  $(h, \Pi) \in \text{Tot}^1 \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}(2)_D^\bullet)$  mit  $\gamma^*(g, A, B) = -(g, A, B) + \mathbf{D}(h, \Pi)$ . Mit ausgeschriebenen Indizes bedeutet das

$$\begin{aligned} \gamma^*B_{\dot{\gamma}(i)} &= -B_i + d\Pi_i \\ \gamma^*A_{\dot{\gamma}(i), \dot{\gamma}(j)} &= -A_{ij} + \Pi_j - \Pi_i + d\log(h_{ij}) \\ \gamma^*g_{\dot{\gamma}(i), \dot{\gamma}(j), \dot{\gamma}(k)} &= g_{ijk}^{-1} \cdot h_{jk} \cdot h_{ik}^{-1} \cdot h_{ij}. \end{aligned}$$

Wir wenden  $\gamma^*$  auf (80) an. Es folgt unter Ausnutzung der letzten Gleichung in der ersten Komponente  $\delta(\gamma^*f \cdot h \cdot f) = 1$ , so dass es also gemäß der verallgemeinerten Mayer-Vietoris-Sequenz in Satz 3.1A ein  $k \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, U(1))$  gibt mit  $\delta k = \gamma^*f \cdot h \cdot f$ . In der zweiten Komponente haben wir  $\delta(\gamma^*m + m + \Pi + d\log(k)) = 0$ , so dass wir eine global definierte Form  $n := \gamma^*m + m + \Pi + d\log(k) \in \Omega^1(\hat{\Sigma})$  haben. Zuletzt haben wir in der dritten Komponente  $\gamma^*\varrho' = -\varrho' + dn$ . Offenbar ist  $\gamma^*dn = dn$ . Wir definieren  $\varrho := \varrho' - \frac{1}{2}dn$ . Dann gilt  $\gamma^*\varrho = -\varrho$ . Außerdem sind die Deligne-Klassen  $\xi$  und  $\text{tr}(\varrho)$  wegen

$$(g, A, B) + \mathbf{D}(f, m + \frac{1}{2}n) = (1, 0, \varrho)$$

gleich. □

4.2.3 *Nichtorientierte Stringtheorie auf dem Torus.* Das erste Modell, welches wir unter Verwendung der Definition einer Jandl-Struktur untersuchen wollen, ist eine 1992 von M. Bianchi, G. Pradisi und A. Sagnotti betrachtete Stringtheorie mit einem Torus  $M = \mathbb{T}^2$  als Zielraum [BiPraSa][Bi].

Wir diskutieren mit unseren Möglichkeiten die Kopplung eines geschlossenen Strings  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}^2$  an einen String-Hintergrund. Aus Dimensionsgründen ist  $\Omega^3(\mathbb{T}^2) = 0$ , wir haben also nur Hintergrundfelder der Feldstärke  $H = 0$  zu betrachten. Die Kopplung des Strings an dieses Hintergrundfeld wollen wir durch den Kopplungsterm (67)

$$\exp(i S_{\text{kopp}}[\phi]) := \text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \phi)$$

beschreiben und betrachten daher die Menge  $w_2(\mathbb{T}^2, 0)$  der Gerben mit Zusammenhang und Krümmung über dem Torus  $\mathbb{T}^2$  mit Krümmung  $K(\nabla, C) = kH = 0$ , wieder aus Dimensionsgründen sind das alle Gerben über dem Torus. Wir wollen uns wieder ein Bild über diese Menge machen und sehen sie gemäß Korollar 3.1G als  $H^2(\mathbb{T}^2, U(1))$ -Torsor. Diese Kohomologiegruppe ist über das Universelle-Koeffizienten-Theorem (19)

$$H^2(\mathbb{T}^2, U(1)) = \text{Hom}(H_2(\mathbb{T}^2), U(1)) \oplus \text{Ext}(H_1(\mathbb{T}^2), U(1)). \quad (81)$$

Die Homologiegruppen des Torus sind bekannt als  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  und  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$ . Die Gruppenhomomorphismen im ersten direkten Summanden bilden damit die Gruppe

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, U(1)) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1).$$

Um die Ext-Gruppe im zweiten direkten Summanden zu berechnen, induzieren wir aus der kurzen exakten Exponentialsequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow U(1) \rightarrow 0$$

abelscher Gruppen für eine beliebige abelsche Gruppe  $A$  die lange, exakte Sequenz von Hom- und Ext-Gruppen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}(A; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Hom}(A; U(1)) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \text{Ext}(A; \mathbb{Z}) \\ & & & & & & \longrightarrow \\ & & & & & & \text{Ext}(A; \mathbb{R}) \\ & & & & & & \longrightarrow \\ & & & & & & \text{Ext}(A; U(1)) \\ & & & & & & \longrightarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Nachdem für eine beliebige abelsche Gruppe  $B$  die Ext-Gruppe  $\text{Ext}(\mathbb{Z}, B)$  verschwindet, haben wir für  $B = \mathbb{R}$

$$\text{Ext}(H_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{R}) = \text{Ext}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{R}) = \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) = 0.$$

In der Sequenz für  $A = H_1(\mathbb{T}^2)$  steht am Ende eine surjektive Abbildung dieser Gruppe in die gesuchte Gruppe  $\text{Ext}(H_1(\mathbb{T}^2), U(1))$ , damit verschwindet auch diese, und wir haben

$$H^2(\mathbb{T}^2, U(1)) = U(1).$$

In [BiPraSa] wird die triviale Involution  $\text{id} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$  betrachtet. Wir folgen dieser Vorgehensweise und nehmen nun an, dass es eine Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  gibt, so dass die Identität eine Jandl-Struktur ist. Dann ist der Raum  $M_Y$  aus (78) diffeomorph zu  $Y_M^{[2]}$ , und die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_M & \xrightarrow{\partial_2} & Y_M^2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \partial_2 \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y_M & \xrightarrow{\partial_2} & Y_M^2 \\ p_3 \downarrow & & \downarrow \partial_1 \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

kommutieren. Dann bedeutet die Gleichung (79)  $p_1^*C + p_3^*C = K(\nabla_L)$  gerade

$$\begin{aligned} K(\nabla_L) &= \partial_2^*C + \partial_1^*C = \partial_2^*C - \partial_1^*C + 2\partial_1^*C \\ &= \delta_Y(C) + 2\partial_1^*C = K(\nabla) + 2\partial_1^*C \end{aligned}$$

also

$$2\partial_1^*C = K(\nabla_L) - K(\nabla).$$

Damit definiert  $2C$  insbesondere eine integrale Kohomologiekategorie. Das war genau eines der Resultate von Bianchi et. al.. In [Bi][BiPraSa] wurde dieses Resultat aber aufgrund einer völlig anderen Argumentation gefunden, nämlich durch eine Analyse der Symmetrien des Spektrums von Bulkfeldern unter einem Austausch von Links- und Rechts laufenden Strömen.

**4.2.4 Das Wess-Zumino-Witten-Modell auf nichtorientierbaren Weltflächen.** Die zweite Theorie, die wir diskutieren wollen, ist das Wess-Zumino-Witten-Modell auf einer nichtorientierbaren Weltfläche. Wir arbeiten also mit einer Theorie von Abbildungen  $\hat{\phi} : \hat{\Sigma} \longrightarrow G$  des doppelten Überlagerungsraumes, die invariant unter der Paritätssymmetrie  $\hat{\phi} \longmapsto \gamma \circ \hat{\phi} \circ \sigma$  sind. Dabei war  $\gamma : G \longrightarrow G$  eine Abbildung der Form  $\gamma = l_z \circ \text{Inv}$  für ein Element  $z$  im Zentrum der Gruppe. Wir hatten die Menge dieser invarianten Abbildungen mit  $\text{Map}(\hat{\Sigma}, G)^{\sigma, \gamma}$  bezeichnet. In dem in Abschnitt 2.3.2 behandelten Fall einer orientierbaren Weltfläche konnten wir dann nach Wahl einer Orientierung  $\text{or}_\Sigma$  über die Bijektion von Abbildungen

$$\widetilde{\text{or}}_\Sigma : \text{Map}(\text{or}_\Sigma(\Sigma), G) \longrightarrow \text{Map}(\hat{\Sigma}, G)^{\sigma, \gamma}$$

die orientierte Theorie von Abbildungen  $\phi : \Sigma \longrightarrow G$  mit der dazugehörigen Bewegungsgleichung reproduzieren. Auf einer nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit können wir keine solche Orientierung wählen und müssen mit Abbildungen des doppelten Überlagerungsraumes fortfahren.

Betrachten wir zunächst den kinetischen Term des Wess-Zumino-Witten-Modells. Er war definiert als das Integral der Lagrangedichte (13) über die Weltfläche. Die Lagrangedichte hatten wir in der orientierten Theorie als die Zweiform  $\mathcal{L}[\phi] = \langle \phi^*\theta, \star\phi^*\theta \rangle \in \Omega^2(\Sigma)$  eingeführt. Das Integral dieser Zweiform hatte sich als invariant sowohl unter

einem Orientierungswechsel als auch unter der separaten Transformation  $\phi \mapsto \gamma \circ \phi$  herausgestellt. In unserem Fall haben wir die Zweiform

$$\hat{\mathcal{L}} := \mathcal{L}[\hat{\phi}] = \left\langle \hat{\phi}^* \theta, \star \hat{\phi}^* \theta \right\rangle \in \Omega^2(\hat{\Sigma})$$

auf dem doppelten Überlagerungsraum. Da der Hodgesche Sternoperator unter einem Orientierungswechsel sein Vorzeichen ändert, erfüllt sie die Bedingung  $\sigma^* \hat{\mathcal{L}} = -\hat{\mathcal{L}}$  und korrespondiert daher zu einer Dichte  $\mathcal{L} := \tau^{-1}(\hat{\mathcal{L}}) \in \Omega^2(\Sigma, \Theta)$ . Die Lagrangedichte trägt ihren Namen also zurecht. Den kinetischen Term können wir nun durch

$$S_{\text{kin}}[\hat{\phi}] = \frac{k}{2} \int_{\Sigma} \mathcal{L}$$

definieren.

Ist  $\Sigma$  möglicherweise orientierbar, so können wir eine globale Orientierung  $\text{or}_{\Sigma}$  wählen und erhalten aus der Bijektion  $\widetilde{\text{or}}_{\Sigma}$  eine Abbildung  $\phi : \text{or}_{\Sigma}(\Sigma) \rightarrow G$ . Dann wird  $\mathcal{L}$  zu einer Zweiform  $\mathcal{L} \in \Omega^2(\text{or}_{\Sigma}(\Sigma))$  und wir haben sofort die gewohnte Wirkung (12).

Für den Wess-Zumino-Term bestimmen wir die bis auf stabile Isomorphie eindeutige Gerbe  $\mathcal{G}$  über  $G$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$ , so dass die Krümmung  $K(\nabla, C) = kH$  ist. Wir behandeln hier den Fall, dass  $\gamma : G \rightarrow G$  eine Jandl-Struktur der Gerbe  $\mathcal{G}$  ist. Die notwendige Bedingung dafür ist dadurch erfüllt, dass  $\gamma$  die Eigenschaft

$$\gamma^* H = -H$$

hat. Zur Berechnung der Holonomie von  $\mathcal{G}$  um die Weltfläche  $\Sigma$  ziehen wir die Deligne-Klasse der Gerbe  $\mathcal{G}$  mit  $\hat{\phi} : \hat{\Sigma} \rightarrow G$  zurück zu einer Deligne-Klasse  $\xi := \hat{\phi}^* \text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C)$  über  $\hat{\Sigma}$ . Aus der Invarianz der Abbildung  $\hat{\phi}$  folgt

$$\begin{aligned} \sigma^* \xi &= \sigma^* \hat{\phi}^* \text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C) = \hat{\phi}^* \gamma^* \text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C) \\ &= -\hat{\phi}^* \text{del}(\mathcal{G}, \nabla, C) = -\hat{\phi}^* \xi. \end{aligned}$$

Damit können wir Satz 4.2c anwenden und erhalten eine Zweiform  $\hat{\varrho} \in \Omega^2(\hat{\Sigma})^-$  mit  $\text{tr}(\hat{\varrho}) = \xi$ . Zwei verschiedene Wahlen  $\hat{\varrho}$  und  $\hat{\varrho}'$  dieser Zweiform führen zu einer Differenz  $\hat{\varrho} - \hat{\varrho}' \in \Omega_{c, \mathbb{Z}}^2(\hat{\Sigma})^-$ . Wir betrachten die korrespondierenden Dichten  $\varrho, \varrho' \in \Omega^2(\Sigma)$ . Für die Differenz gilt gemäß (77)

$$\int_{\Sigma} \varrho - \varrho' = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Sigma}} \hat{\varrho} - \hat{\varrho}' \in \pi \mathbb{Z}.$$

Daher ist das Integral

$$\text{hol}(\mathcal{G}, \nabla, C, \hat{\phi}) := \exp i \int_{\Sigma} \varrho$$

nur bis auf ein Vorzeichen  $\exp(i\pi)$  wohldefiniert.

Im Falle einer orientierten Weltfläche reduziert sich dieser Ausdruck sofort auf die Holonomie der Gerbe  $\mathcal{G}$  mit Zusammenhang  $\nabla$  und Krümmung  $C$  über  $\Sigma$ .

Wir haben also eine Definition des Wess-Zumino-Witten-Modells gefunden, die auf orientierbaren Weltflächen die in Abschnitt 2 beschriebene Theorie reproduziert, und auf nichtorientierbaren Weltflächen die Amplituden im Pfadintegral bis auf ein Vorzeichen bestimmt.





## 5 Literatur

- [AhBo] Y. Aharonov & D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Phys. Rev., 115(1959), 485-491.
- [Al] O. Alvarez, *Topological Quantization And Cohomology*, Commun. Math. Phys. 100 (1985), 279-309.
- [Bi] M. Bianchi, *A Note on Toroidal Compactifications of the Type I Superstring and Other Superstring Vacuum Configurations with 16 Supercharges*, Nucl.Phys. B 528 (1998) 73-94.
- [BiPraSa] M. Bianchi, G. Pradisi & A. Sagnotti, *Toroidal Compactification and Symmetry Breaking in Open-String Theories*, Nucl. Phys. B 376 (1992) 365-386.
- [Bru] I. Brunner, *On Orientifolds of WZW Models and their Relation to Geometry*, JHEP 0201 (2002) 007.
- [BoTu] R. Bott & L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.
- [Bre] G.E. Bredon, *Topology & Geometry*, Springer, 1993
- [Bry] J.L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes And Geometrical Quantization*, Prog. Math. 107, Birkhäuser, Boston 1993.
- [CaJoMu] A.L. Carey, S. Johnson, and M.K. Murray, *Holonomy On D-Branes*, to appear in the Journal of Geometry and Physics, 2004.
- [Ch] R.G. Chambers, *Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux*, Phys. Rev. Lett. 5, 3 (1960).
- [Di1] P.A.M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc., A133(1931), 60-72.
- [Di2] P.A.M. Dirac, *The Theory Of Magnetic Monopoles*, Phys. Rev., 74(1948), 817-830.
- [FiSta] J.M. Figueroa-O'Farril & S. Stanciu, *D-Brane Charge, Flux Quantization And Relative (Co)Homology*, Journal of High Energy Physics 0101, 006 (2001).
- [FuSch] J. Fuchs & C. Schweigert, *The Worldsheet Revisited*, Fields Institute Comm. 39 (2003) 241-249.

- [FuRuSch] J. Fuchs, I. Runkel & C. Schweigert, *TFT construction of RCFT correlators II: Unoriented world sheets*, Nucl.Phys. B678 (2004) 511-637.
- [Ga2] K. Gawędzki, *Topological Actions in two-dimensional Quantum Field Theories*, Non-perturbative quantum field theory, eds. G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter, R. Stora, Plenum Press, New York 1988, pp. 101-142.
- [Ga1] K. Gawędzki, *Conformal field theory: a case study*, Conformal Field Theory: New Non-Perturbative Methods in String and Field Theory, Y. Nutku, C. Saclioglu, T. Turgut eds, Perseus 2000.
- [GaRei] K. Gawędzki & N. Reis, *WZW-Branes and Gerbes*, Rev. Math. Phys. 14 (2002) 1281-1334.
- [Gi] J. Giraud, *Cohomologie Non-Abélienne*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 179, Springer 1971.
- [HuiSchSch] L. R. Huiszoon, K. Schalm, A. N. Schellekens, *Geometry of WZW Orientifolds*, Nucl. Phys. B624 (2002) 219-252.
- [La] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer 1999.
- [Mei] E. Meinrenken, *The basic Gerbe over a compact simple Lie Group*, L'Enseignement Mathématique 49 (2003), 307-333.
- [Mu] M. K. Murray, *Bundle Gerbes*, J. London Math. Soc. (2) 54 (1996), no. 2, 403-416.
- [MuSt] M. K. Murray & D. Stevenson, *Bundle Gerbes: Stable Isomorphism and Local Theory*, J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), no. 3, 925-937
- [Na1] G.L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations*, Springer, 1997.
- [Na2] G.L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Interactions*, Springer, 2000.
- [Nak] M. Nakahara, *Geometry, Topology And Physics*, Adam Hilger, 1990.
- [PrSe] A. Pressley & G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Univ. Press, 1986.
- [St] D. Stevenson, *The Geometry of Bundle Gerbes*, PhD Thesis, University of Adelaide, 2000.
- [To] A. Tonomura et al., *Observation of Aharonov-Bohm Effects by Electron Holography*, Phys. Rev. Lett. 48, 1443 (1982).
- [Wa] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, London.
- [Wi] E. Witten, *Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions*, Commun. Math. Phys. 92 (1984), 455-472.